

МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«ВЫСШИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ»
Кафедра математики и физики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник заданий

для студентов дневной формы обучения всех специальностей

В 2 частях

Часть 2

Минск
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Функции нескольких переменных.....	2
I. Функции нескольких переменных.....	3
II. Неопределенный интеграл.....	5
III. Определенный интеграл	8
IV Несобственные интегралы.....	11
V Двойной интеграл.....	12
VI Криволинейный интеграл.....	12
VII. Дифференциальные уравнения.....	13
VIII. Ряды	17

I. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Найти частные производные и вычислить их значения в заданных точках.

1. а) $z = \frac{x^3}{y^3} - \frac{x^2}{y^2}$ $A(2;1)$; б) $z = \cos^4(3x + 2y)$ $B(\frac{\pi}{3};0)$;

Ответ: а) 8; -32, б) 0; 0.

2. а) $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$ $A(0;2)$; б) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$ $B(1;1)$;

Ответ: а) $-\frac{1}{2}; 0$ б) $4e^2; 4e^2$.

3. а) $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$, $A(-1;1)$; б) $z = e^{-\frac{x^2}{y}}$, $B(-1;2)$;

Ответ: а) -9; 9 б) $\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{4\sqrt{e}}$.

4. Показать, что функция $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет равенству $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Показать, что функция $z = \operatorname{ctg}(x^2 + y^2)$ удовлетворяет равенству $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. Показать, что функция $z = e^{\cos x} \sin y$ удовлетворяет равенству $z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$.

7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке $M(1;1;\frac{\pi}{4})$.

Ответ: $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$.

8. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = y + \ln \frac{x}{z}$ в точке $M(1;1;1)$.

Ответ: $x + y - 2z = 0$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

9. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cdot \cos y$ в точке $M(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$.

Ответ: $x - y - 2z + 1 = 0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$.

10. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Ответ: $z_{\min} = -1$ при $x = 1$; $y = 1$.

11. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad x > 0 \quad y > 0$$

Ответ: Минимум $z = 30$ при $x = 5$ $y = 2$.

12. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^3 + y^3 - 15xy$$

Ответ: $z_{\min} = -125$.

13. Вычислить производную функции $u = y \ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z$ в точке $M(0; 1; 1)$ в направлении вектора $\vec{\lambda} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

14. Найти угол между градиентами функций $u = x^2 - y^2 - 3x^2$ и $v = \frac{yz^2}{x}$ в точке

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{3}{4}$ $\varphi = 139^\circ 36'$.

15. Вычислить производную функции $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$ в точке $M(-2; 1; -1)$ и направлении вектора $\vec{\lambda} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

16. Найти угол между градиентами функций $u = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ и $v = x^2yz^3$ в точке

$$M\left(2; \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: $\cos \varphi = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

17. Вычислить производную функции $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ в точке $M(1; 3; 2)$ в направлении вектора $\vec{\lambda} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Ответ: $-\frac{11}{3}$.

18. Найти угол между градиентами функций $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ и $v = \frac{z \cdot x}{y}$ в точках $M_1(1; 1)$ и

$$M_2(-1; -1).$$

Ответ: $\cos \varphi = -1$ $\varphi = \pi$.

19. Найти производные второго порядка функции:

а) $z = \sin^2(2x + 3y)$;

ж) $z = x e^{-xy}$;

б) $z = x \ln \frac{y}{x}$;

з) $z = \sin x \sin y$;

в) $z = x^3 + 2x^2y^5 + y$;

и) $z = x^3y^2 + x \sin y$;

$$\text{г) } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

$$\text{д) } z = \cos(x + y);$$

$$\text{е) } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2);$$

$$\text{к) } z = \sqrt{2xy + y^2};$$

$$\text{л) } z = \frac{x^2}{2y - 3};$$

$$\text{м) } z = e^x \ln y + \sin y \ln x.$$

$$20. \text{ Найти } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}: z = \ell^{xy^2}.$$

$$21. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = \frac{\cos y^2}{x}.$$

$$22. \text{ Найти } \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}: z = x \ln(xy).$$

$$23. \text{ Найти } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}: z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$24. \text{ Найти } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}: u = \ln \operatorname{tg}(x + y).$$

$$25. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

$$26. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ где } x + y + z = \ell^z.$$

$$27. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

$$28. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = \ln \sin xy.$$

$$29. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = \ell^{x^2 y}.$$

$$30. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = x^2 \ln(x + y).$$

$$31. \text{ Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: z = xy + \sin(x + y).$$

II. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$1. \int \cos(2x) d(2x)$$

2. $\int e^{x^2} d(x^2)$
3. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
5. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$
6. $\int x^2(3x-1) dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}};$
8. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}};$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$
10. $\int \frac{x dx}{4+x^2};$
11. $\int \operatorname{tg} u du;$
12. $\int \operatorname{ctg} u du.$
13. $\int \frac{dx}{7x-5};$
14. $\int \frac{x^2 dx}{5x^3-4};$
15. $\int (3+2x)^{12} dx$
16. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$
17. $\int \frac{x dx}{1+x^4}$
18. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+3}}$
19. $\int \frac{du}{\sin u}$
20. $\int \frac{du}{\cos u};$
21. $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$
22. $\int \frac{dx}{3x^2+5x-1}$
23. $\int \frac{x^4}{1-x} dx$
24. $\int \frac{2x^3-3}{x+5} dx$
25. $\int \ln x dx$

26. $\int (2x-1) \sin x dx$
27. $\int e^x \cos x dx$
28. $\int x^2 \cdot 2^x dx$
29. $\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}$;
30. $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+3} dx$;
31. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-x^2}}$;
32. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx$
33. $\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2} dx$
34. $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$.
35. $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$.
36. $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} dx$.
37. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; .
38. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$
39. $\int \cos^4 x dx$; .
40. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$
41. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$
42. $\int \frac{dx}{\sin^6 x \cdot \cos^6 x}$
43. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$
44. $\int \cos 3x \cdot \cos^2 x dx$
45. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
46. $\int \frac{dx}{5-4\cos x+3\sin x}$.
47. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
48. $\int \frac{dx}{5-4\cos x+3\sin x}$
49. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

50. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$
51. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$
52. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$
53. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{x(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})} dx.$
54. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$
55. $\int \frac{z^2+1}{z^3(z+1)} dz$
56. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}.$
57. $\int \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

III. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x) dx}{x};$ Ответ: $1 - \cos 1.$
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx;$ Ответ: $\operatorname{arctge} - \frac{\pi}{4}.$
3. $\int_0^1 (2x^3 - 1)x^2 dx;$ Ответ: 0.
4. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2 + 1};$ Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}.$
5. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}};$ Ответ: $-\frac{2}{3}(\sqrt{34}-5).$
6. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+9}};$ Ответ: 1.
7. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}};$ Ответ: $\sqrt{5}-1.$
8. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx;$ Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}.$
9. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}};$ Ответ: $\frac{2}{3}(\sqrt{34}-5).$
10. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$ Ответ: $\ln 2.$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; Ответ: $\arctg 3 - \arctg 2$.
12. $\int_0^1 \frac{z^3 dz}{z^8 + 1}$; Ответ: $\frac{\pi}{10}$.
13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x}}$; Ответ: $\frac{2}{3}$.
14. $\int_3^8 \sqrt{x + 1} dx$; Ответ: $\frac{38}{3}$.
15. $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{x dx}{\sin^2 x^2}$; Ответ: 1.
16. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{ch^2 x}$; Ответ: $th \ln 3 - th \ln 2$.
17. $\int_0^1 chx dx$; Ответ: $sh 1$.
18. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tgx dx$; Ответ: 0.
19. $\int_2^6 \sqrt{x - 2} dx$; Ответ: $\frac{16}{3}$.
20. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{16 + x^2}}$; Ответ: $4(\sqrt{2} - 1)$.
21. $\int_2^{\pi/2} x \cos x dx$; Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.
22. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$; Ответ: $\frac{2}{3}$.
23. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}}$; Ответ: $2 - \sqrt{2}$.
24. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos x + 1}$; Ответ: $\ln 2$.
25. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos^2 x}$; Ответ: 1.
26. $\int_0^1 100x^3 \sqrt{4 + 5x^4} dx$; Ответ: $\frac{190}{3}$.
27. $\int_0^{\sqrt[9]{3}} \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$; Ответ: $\frac{\pi}{9}$.
28. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5 - 4x}}$; Ответ: $\frac{19}{24}$.

29. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx;$ Ответ: $\frac{1}{64}.$
30. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+4x^2};$ Ответ: $\frac{\pi}{8}.$
31. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx;$ Ответ: $\frac{\pi}{4}.$
32. $\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{z^3 dz}{z^8+4};$ Ответ: $\frac{\pi}{32}.$
33. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4};$ Ответ: $\frac{\pi}{8}.$
34. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}};$ Ответ: $\operatorname{arctge} - \frac{\pi}{4}.$
35. $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{(1+e^{2x})^2};$ Ответ: $\frac{1-e^2}{4(1+e^2)}.$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x};$ Ответ: $\frac{1}{8}.$
37. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx;$ Ответ: $3e-5.$
38. $\int_0^1 \arcsin x dx;$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-1.$
39. $\int_3^9 \frac{\ln x}{x} dx;$ Ответ: $\frac{3\ln^2 3}{2}.$
40. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$ Ответ: $2e(e-1).$
41. $\int_0^{\pi/4} (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx;$ Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$
42. $\int_0^{3\pi/8} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)};$ Ответ: $\frac{3}{2}.$
43. $\int_0^2 (1+3x)^4 dx;$ Ответ: $\frac{7^5-1}{15}.$
44. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy;$ Ответ: $\frac{23}{3}.$
45. $\int_{-e}^e \frac{x \ln(x^2+9)}{x^2+9} dx;$ Ответ: 0.
46. $\int_{-1}^1 \ln \frac{7-x}{7+x} dx;$ Ответ: 0.

$$47. \int_{-2}^2 \frac{2x^3 - 5x}{16 - x^2} dx; \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$48. \int_{-0,5}^{0,5} \ln \left| \frac{3-x}{3+x} \right| dx; \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$49. \int_1^{-1} \frac{(3x - 2x^3) dx}{9 - x^2}; \quad \text{Ответ: } 0.$$

Найти площадь фигур, ограниченных линиями.

$$1. y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Ответ: } 1 \text{ кв. ед.}$$

$$2. y = -x^2 - 1, y = 0, x = -2, x = 1. \quad \text{Ответ: } 6 \text{ кв. ед.}$$

$$3. x - 2y + 4 = 0, x + 2y - 8 = 0, \\ y = 0, x = -1, x = 6. \quad \text{Ответ: } 14,75 \text{ кв. ед.}$$

$$4. y = 0,5x^2 - 4x + 10, y = x + 2. \quad \text{Ответ: } 18 \text{ кв. ед.}$$

$$5. y = x^2, x = y^2. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{3} \text{ кв. ед.}$$

$$6. y = 2x^2 + 1, y = x^2 + 10. \quad \text{Ответ: } 36 \text{ кв. ед.}$$

$$7. y = x^2 + 6x + 7, y = x + 7. \quad \text{Ответ: } \frac{125}{6} \text{ кв. ед.}$$

$$8. y = -x^2 + 4x - 1, y = x - 1. \quad \text{Ответ: } 4,5 \text{ кв. ед.}$$

IV НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

$$1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}. \quad 5. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx \quad 9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$2. \int_0^{\infty} \sin x dx \quad 6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} \quad 10. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx$$

$$3. \int_0^{\infty} x e^{-x^3} dx \quad 7. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad 11. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx \quad 8. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} \quad 12. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

1. 1. 2. Расходится. 3. π 4. Расходится. 5. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 6. $\frac{\pi^2}{8}$. 7. $\frac{1}{2}$. 8. 2. 9. $\frac{1}{\ln 2}$. 10. Расходится. 11. Расходится. 12. Расходится.

V ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрирование по y , если область D задана указанными линиями.

1.1. $D: y = \sqrt{4 - x^2}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad x \geq 0$

1.2. $D: x^2 = 2y, \quad 5x - 2y - 6 = 0$

1.3. $D: x = \sqrt{8 - y^2}, \quad y \geq 0, \quad y = x$

1.4. $D: x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \leq 1, \quad y = \ln x$

2. Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной указанными линиями.

2.1. $\iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad D: y = x^2, \quad x = y^2.$

2.2. $\iint_D xy^2 dx dy, \quad D: y = x^2, \quad y = 2x$

2.3. $\iint_D (x + y) dx dy, \quad D: y^2 = x, \quad y = x$

2.4. $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D: y = 2 - x, \quad y = x, \quad x \geq 0$

VI КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

3. Вычислить данные криволинейные интегралы.

3.1. $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A (-1,$

1) до точки $B (1, 1)$.

3.2. $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} — дуга астроида $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ от точки $A (2, 0)$

до точки $B (0, 2)$.

3.3. $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, где L_{OA} — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки O

$(0, 0)$ до точки $A (1, 1)$.

$$3.4. \oint_L (x+2y)dx + (x-y)dy, \text{ где } L - \text{окружность } x = 2\cos t, y = 2\sin t \text{ при}$$

положительном направлении обхода

4. Вычислить данные криволинейные интегралы.

$$4.1. \int_{L_{OA}} (xy - y^2)dx + xdy, \text{ где } L_{OA} - \text{дуга параболы } y = 2x^2 \text{ от точки } O(0,0) \text{ до точки}$$

A(1,2).

$$4.2. \int_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz, \text{ где } L_{OBA} - \text{ломанная } OBA; O(0,0); B(0,2,0); A(0,2,1).$$

$$4.3. \int_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy, \text{ где } L - \text{дуга циклоиды } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$$

$$\pi/6 \leq t \leq \pi/3$$

$$4.4. \int_L yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz, \text{ где } L - \text{дуга кривой}$$

$x = R\cos t, y = R\sin t, z = at/(2\pi)$, "пробегаемая" от точки пересечения ее с плоскостью $z = 0$ до точки пересечения ее с плоскостью $z = a$.

5. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу dU :

$$5.1. dU = (4x^3y^3 + 2e^{2x})dx + (3x^4y^2 - 2\cos 2y)dy;$$

$$5.2. dU = (\ln y - 2x \operatorname{arctg} y)dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{x^2}{1+y^2}\right)dy;$$

$$5.3. dU = \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \frac{1}{x(y-2)}\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \frac{\ln x}{(y-2)^2}\right)dy;$$

$$5.4. dU = \left(\frac{1}{x^2(y-1)^3} - \frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx + \left(\frac{3}{x(y-1)^4} - \frac{\arcsin x}{y}\right)dy$$

VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Найти общее или частное решение (интеграл) дифференциального уравнения:

$$1. (e^{3x} + 5)dy - 2ye^{3x}dx = 0$$

$$\text{Ответ: } y = e^{\sqrt[3]{e^{3x} + 5}}.$$

$$2. \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + c.$$

$$3. 3e^y \cos x dy - \sin x(9 + e^y)dx = 0, y(0) = 0$$

$$\text{Ответ: } y = \ln(10\sqrt[3]{\cos x} - 9).$$

$$4. (e^{5x} + 8)dy + ye^{5x}dx = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = c\sqrt[5]{e^{5x} + 8}.$$

$$5. (2xy^2 + x)dx + (3y - x^2y)dy = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } (2y^2 + 1) - c(3 - x^2) = 0.$$

$$6. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right).$$

$$7. \sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{1-x^2} + c\right).$$

$$8. (1+4x^2)dy - \sqrt{9-y^2}dx = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } \arcsin \frac{y}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x = c.$$

$$9. (4x + xy^2)dx + (3y - x^2y)dy, y(1) = 4$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = \sqrt{10(3-x^2)-4}.$$

$$10. 3e^x \operatorname{tg} ax + (1-e^x) \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = \operatorname{arctg} c(1-e^x)^{-3}.$$

$$11. y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{y+x}{y+2x} = cx.$$

$$12. (x+y)dy - (y-4x)dx = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } \operatorname{arctg} \frac{y}{4x} = \ln \frac{c}{y^2 + 4x^2}.$$

$$13. xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$\text{ОТВЕТ: } y + \sqrt{2x^2 + y^2} = cx^4.$$

$$14. y - xy' = x + yy'$$

$$\text{ОТВЕТ: } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$15. (10x + 8y)dx + (7x + 5y)dy = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } (x+y)^2 (2x+y)^3 = c.$$

$$16. xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x, y(1) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2} - \ln|x|.$$

2. Решить дифференциальные уравнения:

$$1. y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = e^{-x^2} \left(c + \frac{x^2}{2} \right).$$

$$2. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = x \ln x + \frac{c}{x}.$$

$$3. 3xdy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x)dx$$

$$\text{ОТВЕТ: } y^3 (3 + Ce^{\cos x}) = x.$$

$$4. y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = (x+1)^2 (e^x + c).$$

$$5. (1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy$$

$$\text{ОТВЕТ: } x = \operatorname{arctg} y - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} y}.$$

$$6. y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$$

$$\text{ОТВЕТ: } y^2 = e^{-2x^2} \left(c + \frac{x^2}{2} \right)^2.$$

$$7. dy = \frac{ydx}{2y \ln y + y - x}$$

$$\text{ОТВЕТ: } x = y \ln y + \frac{c}{y}.$$

$$8. y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin^3 x}$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = \frac{\sin x}{\sqrt{c - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|}}.$$

$$9. x^2 y'' = \ln x$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = -\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1 x + C_2.$$

$$10. y'' = 6x + \sin 3x$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = x^3 - \frac{1}{9} \sin 3x + C_1 x + C_2.$$

11. $y'' = xe^x$

Ответ: $y = (x-2)e^x + C_1x + C_2$.

12. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$

Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.

13. $y'' \operatorname{tg} x = 2y'$

Ответ: $y = C_1 \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C_2$.

14. $xy'' = y' + 2$

Ответ: $y = C_1x^2 - 2x + C_2$.

3. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

1. $y'' + 2y(y')^3 = 0, y(0) = y'(0) = 1$

Ответ: $y = \sqrt[3]{3x+1}$.

2. $y''y^3 = 36, y(0) = 3, y'(0) = 2$

Ответ: $y^2 = 8x^2 + 12x + 9$.

3. $y'' = 50y^3, y(3) = 1, y'(3) = 5$

Ответ: $y = \frac{1}{16-5x}$.

4. Найти общее или частное решения дифференциальных уравнений:

1. $2y'' + 3y' + y = 0$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-x/2}$.

2. $y'' + 4y' + 20y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$

Ответ: $y = (2 \cos 4x + \sin 4x)e^{-2x}$.

3. $y^{(4)} + 4y''' = 0$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$.

4. $y'' - 4y' + 20y = 0$

Ответ: $y = e^{2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

5. $4y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

Ответ: $y = e^{3/2x} - e^{x/2}$.

6. $y''' + 3y'' + 12y' + 8y = 0$

Ответ: $y = e^{-2x} (C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

5. Найти общее решение данных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных:

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$

Ответ: $y = (C_1x + C_2)e^x - e^x(1 + \ln|x|)$.

2. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$.

3. $y'' - y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

Ответ: $y = \frac{1}{4} (e^x \ln(1 + e^{-2x}) + e^{-x} \ln(1 + e^{2x})) + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

4. $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x - \operatorname{tg} x) \cos x - \sin x \ln |\cos x|$.

5. $y'' + 4y = \frac{2}{\cos^3 2x}$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{\cos 4x}{\cos 2x}$.

6. Записать вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения:

1. $y'' + 2y' + 2y = f(x)$, где

а) $f(x) = 2 \cos x$;

б) $f(x) = x^2 e^x + 1$;

в) $f(x) = e^{-x} (x \cos x - 3 \sin x)$.

2. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$, где

а) $f(x) = x^2 - 4x$;

б) $f(x) = (2x-1)e^{4x}$;

в) $f(x) = \cos 4x - 3xe^{-x}$.

3. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$, где

а) $f(x) = (3x^2 + 7)e^{-x}$;

б) $f(x) = x \cos x - 2 \sin x$;

в) $f(x) = x + 1 + e^{-2x}$.

7. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1. $y'' + 5y' + 6y = 2(1-x)e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

Ответ: $e^{-3x} + (1 + 4x - x^2)e^{-2x}$.

2. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Ответ: $2e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)e^x$.

3. $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$

Ответ: $\sin 4x - \cos 4x + (2x + 1)e^{-x}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' - 2y' + y = 3e^{-2x} + x - 4$

Ответ: $(C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{3}e^{-2x} + x - 2$.

2. $y'' + y' = 5x + 2e^x$

Ответ: $C_1 + C_2e^{-x} + e^x + \frac{2}{5}x^2 - 5x$.

3. $y'' - 2y' - 3y = x + e^{3x}$

Ответ: $C_1e^{-x} + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)e^{3x} + \frac{1}{9}(2 - 3x)$.

9. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, x(0) = -1 \\ y' = -3x - y, y(0) = 2 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = -2e^t + e^{2t} \\ y = 3e^t - e^{2t} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x' = x + y, x(0) = 0 \\ y' = -6x + 6y, y(0) = -1 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = e^{3t} - e^{4t} \\ y = 2e^{3t} - 3e^{4t} \end{cases}$.

10. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений методом исключения:

1. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + e^t \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1)e^t \\ y = (C_1 \sin t - C_2 \cos t)e^t \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = -4x - 3y - 2t \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^{-t} + 5t - 9 \\ y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2t)e^{-t} - 6t + 14 \end{cases}$.

11. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} x' = x - 2z \\ y' = -2y + z \\ z = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 4C_1 + C_2e^t \\ y = C_1 + C_3e^{-2t} \\ z = 2C_1 \end{cases}$.

$$2. \begin{cases} x = 2x + 5y - z \\ y = 3y + 4z \\ z = -z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{-t} + C_3 e^{3t} \\ z = C_1 e^{-t} \end{cases}.$$

12. Найти решение дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях:

$$1. \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0, \text{ при } t = 0, x_0 = t, x'_0 = 2$$

$$\text{Ответ: } x(t) = e^{2t}.$$

$$2. \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 1, \text{ при } t = 0, x_0 = x'_0 = 0$$

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4t.$$

$$3. \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = t, t = 0, x_0 = x'_0 = 0$$

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} \sin 2t.$$

$$4. \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2z = t, \text{ при } t = 0, x_0 = x'_0 = 0$$

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

13. Найти частное решение системы уравнений:

$$1. \begin{cases} \frac{dy}{dt} + 7y - z = 0, \\ \frac{dz}{dt} + 5z + 2y = 0. \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 1$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y(t) = e^{-6t} \cos t \\ z(t) = e^{-6t} (\cos t - \sin t) \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} \frac{dy}{dt} - 2y - 4z = \cos t, \\ \frac{dz}{dt} + 2z + y = \sin t. \end{cases} \quad \text{при } y(0) = z(0) = 0$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y(t) = 4t + 2 - 2 \cos t - 3 \sin t \\ z(t) = 2 \sin t - 2t \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} \frac{dy}{dt} + y - 3z = 0, \\ \frac{dz}{dt} - z - y = e^t. \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 0$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - e^t \\ z(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-2t} \end{cases}.$$

VIII. РЯДЫ

1. Исследовать на сходимость ряды:

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$$

Ответ: расходится.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Ответ: сходится.

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2-1} \right)$$

Ответ: сходится.

$$2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$$

Ответ: сходится.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n/2}}$$

Ответ: сходится.

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Ответ: расходится.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$

Ответ: расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Ответ: сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

Ответ: сходится.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

Ответ: сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n-1)!}$

Ответ: сходится.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

Ответ: расходится.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$

Ответ: сходится абсолютно.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+3} \right)^n$

Ответ: сходится абсолютно.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Ответ: сходится условно.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$

Ответ: сходится абсолютно.

3. Найти интервалы сходимости рядов:

1. а) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Ответ: $-1 \leq x < 1$.

б) $x - 2 + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots$

Ответ: $1 \leq x \leq 3$.

2. а) $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Ответ: $-\infty < x < \infty$.

б) $\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots$

Ответ: $1 < x < 3$.

3. а) $\frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2 \cdot 5} + \frac{x^9}{8^3 \cdot 9} + \frac{x^{12}}{8^4 \cdot 13} + \dots$

Ответ: $-2 \leq x < 2$.

б) $x - 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$

Ответ: $3 \leq x < 5$.