МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«ВЫСШИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ»
Кафедра математики и физики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник заданий

для студентов дневной формы обучения всех специальностей

В 2 частях
Часть 1

Минск
2012

УДК 517.58
ББК 22.161
В 93

Рекомендовано к изданию
кафедрой математики и физики
08 апреля 2011, протокол № 9

Составители:
Л. А. Рябенкова, старший преподаватель
кафедры математики и физики;
В. Н. Теслюк, канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедры математики и физики

Рецензент:
А. В. Петрович, старший преподаватель
кафедры математики и физики

В93 **Высшая** математика: сборник заданий для студентов всех специальностей / сост.: Л. А. Рябенкова, В. Н. Теслюк. – Минск : УО ВГКС, 2012. – 44с.

Приведены задания по темам: Скалярное произведение; Определитель; Векторы. Векторное и смешанное произведение векторов; Прямая на плоскости. Кривые; Плоскость; Прямые в пространстве; Приведение кривых к каноническому виду и их построение; Преобразования. Исследование и построение кривых второго порядка; Пределы функций; Точки разрыва функций; Дифференцирование функции; Правило Лопиталя. Основные теоремы дифференцирования; Выпуклость, точки перегиба, асимптоты графика функции; Пределы. Выпуклость, точки перегиба графика функции; Интегралы и их приложения; Функции нескольких переменных; Частные производные высших порядков и приложения ФНП; Экстремум ФНП.

УДК 517.58
ББК 22.166

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sqrt{\alpha} & -1 \\ \alpha & \sqrt{\alpha} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

1.2. Вычислить по правилу треугольника.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

1.3. Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки.

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

1.4. Упростить и вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

II. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.

1.1 Найти $A+\alpha B+\beta C$.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha=-2$, $\beta=3$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha=-1$, $\beta=2$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha=1$
$\beta=2$;

г) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\alpha=2$
$\beta=-1$;

д) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\alpha=3$
$\beta=-2$.

1.2. Найти AB, предварительно проверив, что умножение возможно.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 3\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2 & 3\\ -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 4\\ 7 & 8 & 1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 3\\ 3 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

1.3. Найти обратную матрицу. Проверить выполнение условий $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ 9 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

III. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследовать системы на совместность и решить по формулам Крамера, матричным способом и методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases};$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases};$

в) $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+3y-4z=1 \\ 3x+y-2z=5 \end{cases};$ г) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases};$

д) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}.$

IV. ВЕКТОРЫ
IV.1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

а) Найти проекции вектора $\vec{b}$ на оси координат, если $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, A (0; 1; 0), B (1; 2;1), C (3; 5; 4), D (4; 8; 2).

б) Найти проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, если $\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD}$, A (-1; 2; 1), B (2; -3; 2), C (3; 4; 1), D (5; 4; 3).

в) Найти координаты середин сторон треугольника ABC: $A(2;1;1)$, B (-1; 0; 1), C (3; 7; -5).

г) Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и его направляющие косинусы: A (1; 2; 0), B (3; 0; 3).

д) Вычислить $\text{ПР}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$, если A (-2; 3; -4), B (3; 2; 5), C (1; -1; 2), D (3; 2; -4).

е) Найти работу, произведенную силой $\vec{F}$, если ее точка приложения перемещается из M_1 в M_2; $\vec{F}$ = (1; -2; 5), M_1 (0; 2; 1), M_2 (1; 3; 2).

ж) Найти работу силы $\vec{F}$ = (1; 1; 3), если точка ее приложения перемещается из точки A_1 (1; 3; 5) в точку A_2 (1; 2; 0).

з) Найти $\angle A$ в треугольнике ABC, если A (2; -1; 1), B (2; -2; 1), C (2; 4; 3).

и) Построить параллелограмм на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и найти угол между его диагоналями: $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} =$ (1; 3; 0).

к) Найти проекцию суммы векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на ось ℓ, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{c} = 3\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$ образует с осью ℓ угол $\varphi_1 = 60^\circ$, а вектор $\vec{b}$ образует с осью ℓ угол $\varphi_2 = 120^\circ$.

л) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m},\wedge\ \vec{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

IV.2. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

а) Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{b} = (2, 3, 6)$ и $\vec{\alpha} = (2, -2, 1)$.

б) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, и длину его диагоналей.

в) Сила $\vec{F} = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $C\ (2, 4, 0)$.

г) Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках
A (1, 2, 0), B (3,0, -3), C (5, 2, 6).

д) Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке A (4, -2, 3). Определить момент этой силы относительно точки C (3, 2, -1).

е) Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 26$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$.

ж) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2$, вычислить $(\vec{a} \times \vec{b})^2$.

з) В треугольнике с вершинами A (1, -1, 2), B (5, -6, 2), C (1, 3, -1) найти длину высоты $k = |\overrightarrow{BD}|$.

и) Сила $\vec{F} = (3, 4, 0)$ приложена к точке A (1, 2, 3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки B (-1, 3, 7).

к) Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

л) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5,\ (\vec{a},\hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

м) Три силы $\vec{F}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{F}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{F}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ приложены к точке A (2, -1, 0). Определить момент равнодействующей этих сил относительно точки B (4, 1, -1).

н) Проверить, будут ли точки A (2, 3, 4), B (1, 2, 3), C (1, 1, -2), D (3, -2, 1) лежать в одной плоскости.

о) Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j},\ \vec{b} = -4\vec{j} + \vec{k},\ \vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

п) Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами A (0, 0, 1), B (2, 3, 5), C (6, 2, 3), D (3, 7, 2).

р) Найти длину высоты треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, опущенной на грань, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k},\ \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

с) Вычислить смешанное произведение векторов и указать, какой является тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – правой или левой $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},\ \vec{c} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

т) В треугольной призме $ABCA'B'C'$ $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 4, -1)$, $\overrightarrow{AA'} = (1, 2, -5)$. Вычислить длину высоты.

у) Определить, являются ли компланарными векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{j} - 5\vec{k},\ \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

V. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ.

V.1. По данным координатам вершин треугольника *ABC* найти:

1.1. уравнения сторон *AB* и *BC*;

1.2. уравнение высоты *CD*, опущенной на сторону *AB* и ее длину;

1.3. угол *B* в радианах;

1.4. уравнение медианы *AE*, проведенной к стороне *BC*;

1.5. координаты точки *К* пересечения высоты *CD* и медианы *AE*.

а) *A* (4; 3), *B* (16; -6), *C* (20; 16).

б) *A* (3; 2), *B* (15; -7), *C* (19; 15).

V.2. Найти уравнение средней линии треугольника *ABC*, параллельной стороне *AB*, зная координаты двух вершин *B* и *C* и уравнение стороны *AB*.

а) *B* (16; -6), *C* (20; 16), $AB: 3x + 4y - 24 = 0$.

б) *B* (-11; 11), *C* (-15; -11), $AB: 3x + 4y - 11 = 0$.

VI. ПЛОСКОСТЬ

1. Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

   а) M_1 (3, -1, 2), M_2 (4, -2, -1).

   б) M_1 (2, -1, 3), M_2 (3, 2, 1).

2. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку M_1 и

   а) параллельно данной плоскости;

   б) перпендикулярно двум данным плоскостям.

   а) *M₁* (3, -2, -7) а) $2x - 3z + 5 = 0$,

   б) $2x - y + 3z - 1 = 0,\ \ x + 2y + z = 0$.

   б) *M₁* (1, 4, 0) а) $3x - y + 2z - 5 = 0$,

   б) $2x - y + z + 2 = 0,\ \ x - 4y + 2z - 7 = 0$.

3. Вычислить расстояние между данными плоскостями.

   а) $x - 2y - 2z - 12 = 0,\ \ x - 2y - 2z - 6 = 0$.

   б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0,\ \ 4x - 6y + 12z - 21 = 0$.

VII. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$.

   а) *M₀* (-1, 2, 1), $\vec{s} = (5, 4, 1)$.

   б) *M₀* (0, 1, -3), $\vec{s} = (1, 0, 2)$.

2. Даны общие уравнения прямой в пространстве:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Составить канонические и параметрические уравнения прямой.

а) $\begin{cases} 3x-4y+5z+3=0 \\ 2x+3z-1=0 \end{cases}.$

б) $\begin{cases} 2x-4y+z+2=0 \\ 3x-2y+2z-2=0 \end{cases}.$

3. Найти угол между прямыми.

а) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}.$

б) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}.$

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости α .

   а) M_0 (3, -1, 2), $3x+4y-z+5=0\ (\alpha)$.

   б) M_0 (-1, 3, 2), $2x-z+2=0\ (\alpha)$.

VIII. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно плоскости (α). $Ax+By+Cz+D=0$.

   а) M_1 (2, 0, 5), $(\alpha)\ 2y-z+1=0$.

   б) M_1 (4, 1, 2), $(\alpha)\ x-4y+2z-5=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно заданной прямой (ℓ).

а) M_0 (1, -2, 1), $(\ell)\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

б) M_0 (1, 0, 1), $(\ell)\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y+z-6=0. \end{cases}$

3. Найти координаты точки *Q*, симметричной точке $P(x_1, y_1, z_1)$ относительно данной плоскости α .

а) *P* (1, 3, -4), $(\alpha)\ 3x+y-2z=0$

б) *P* (1, 3, 4), $(\alpha)\ 3x+y-2z+16=0$

4. Найти угол между прямой (ℓ) и плоскостью (α).

а) $(\ell)\begin{cases} x-2y+3=0, \\ z+3y-1=0. \end{cases}$ $(\alpha)\ 2x+3y-z+1=0$.

б) $(\ell)\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$ $(\alpha)\ 3x+y-2z=0$.

5. Найти расстояние от точки M_1 до плоскости (α).

а) M_1 (5, 4, 1), $(\alpha)\ 2x-y-2z+15=0$.

б) M_1 (0, 0, 0), $(\alpha)\ 3x+y-2z-4=0$.

IX. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

1. Составить уравнение окружности с центром в точке $S(x_0, y_0)$ и проходящей через точку $M(x, y)$. Построить окружность.

   а) S (2; -3), M (5; 1).

   б) S (5; 6), M (7; 3).

2. Определить координаты центра S и радиус окружности (α).

   а) (α) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

   б) (α) $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

3. Показать, что уравнение (β) определяет эллипс. Найти его центр, полуоси, эксцентриситет. Построить эллипс.

   а) (β) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

   б) (β) $9x^2 + 25y^2 + 18x + 100y - 116 = 0$.

4. Определить точки пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ и параболы $x^2 = 4y$.

5. Определить точки пересечения прямой $3x + 4y - 12 = 0$ и параболы $y^2 = -9x$.

6. Определить координаты вершины, величину параметра и направление оси параболы, если уравнение параболы имеет вид: $y = x^2 - 8x + 15$.

7. Привести уравнения кривых к каноническому виду и построить их.

   1) $3x^2 - 4y^2 + 8y - 12x - 4 = 0$.

2) $x = 5y^2 + 10y + 3$.

3) $3y^2 - x^2 + 12y + 8x - 16 = 0$.

4) $y^2 - 5y - 5x + \frac{5}{4} = 0$.

5) $x^2 + 3x + 2y^2 - 8y - \frac{7}{4} = 0$.

6) $3y - x^2 + 6x = 0$.

7) $2y^2 - 8y - x^2 - 6x - 5 = 0$.

8) $y^2 + 3y - x + \frac{1}{4} = 0$.

9) $5x^2 - 9y^2 - 10x + 36y + 19 = 0$.

10) $y = x^2 - 5x + 7$.

11) $3x^2 + 4y^2 + 8y - 12x - 32 = 0$.

12) $x = -2y^2 + 8y - 7$.

13) $4y^2 + 3x^2 - 8y + 9x - \frac{5}{4} = 0$.

14) $4x - y^2 - 4y = 0$.

8. Построить линии и найти точки их пересечения.

1) $x^2 - 4x + 3y - 9 = 0$; $2x - 3y + 6 = 0$.

2) $x^2 - 10x - 4y + 13 = 0$; $x - y + 7 = 0$.

3) $x = 4 - y^2$; $x = y^2 - 2y$.

4) $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$; $3x - 3y - 7 = 0$.

5) $x^2 - 4x + 3y - 9 = 0$; $2x - 3y + 6 = 0$.

6) $x^2 + y - 2x + 2 = 0$; $x + y + 2 = 0$.

7) $x^2 - 4y - 4 = 0$; $x^2 + 8y - 4 = 0$.

X. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Построить поверхности:

а) $x = 5 - z^2 - 6z$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{49} = 1$;

в) $x^2 - 4z^2 - 8z = 0$; г) $z - 2 = x^2 + 4y^2$;

д) $\frac{x^2}{2} + z^2 = 1$; е) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$.

XI. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

1.1. $\vec{a} = (1,\ 4,\ 6), \vec{b} = (1,\ -1,\ 1), \vec{c} = (1,\ 1,\ 3)$.

1.2. $\sin x,\ \cos x,\ tgx$ на $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

1.3. $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1), \vec{b} = (3,\ -1,\ 5), \vec{c} = (1,\ -4,\ 3)$.

1.4. $2,\ \sin x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

1.5. $\vec{a} = (5,\ 4,\ 3), \vec{b} = (3,\ 3,\ 2), \vec{c} = (8,\ 1,\ 3)$.

1.6. $1,\ x,\ \sin x$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

1.7. $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1), \vec{b} = (0,\ 1,\ 1), \vec{c} = (0,\ 0,\ 1)$.

2. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

2.1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \quad - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\left(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\right)$, если он задан в базисе $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$.

3.1.
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = \left(6, -1, 3\right).$$

3.2.
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = (3/2)\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = \left(1, 2, 4\right).$$

3.3.
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = (4/3)\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = \left(1, 3, 6\right).$$

3.4.
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + (3/2)\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = \left(2, 4, 1\right).$$

3.5.
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + (4/3)\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = \left(6, 3, 1\right).$$

3.6.
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = (5/4)\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = \left(1, 4, 8\right).$$

3.7.

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + (5/4)\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$$

$$\vec{x} = (8, 4, 1).$$

4. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

4.1. $$\begin{aligned} &Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ -3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3), \\ &Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2), \\ &Cx = (x_3^4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

4.2. $$\begin{aligned} &Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2), \\ &Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 0,\ x_2^4 + 2x_3), \\ &Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

4.3. $$\begin{aligned} &Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3), \\ &Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3), \\ &Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3). \end{aligned}$$

4.4. $$\begin{aligned} &Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3), \\ &Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 1,\ 2x_1 - 3x_2 - 4), \\ &Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3). \end{aligned}$$

4.5. $$\begin{aligned} &Ax = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6), \\ &Bx = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3), \\ &Cx = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3). \end{aligned}$$

4.6.
$$Ax=\left(2x_1+x_2,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2^2-5x_3\right),$$
$$Bx=\left(2x_1+x_2,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2-5x_3\right),$$
$$Cx=\left(2x_1+x_2,\ x_2-2,\ 3x_1-4x_2-5\right).$$

4.7.
$$Ax=\left(x_1,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1+5x_2+6x_3\right),$$
$$Bx=\left(x_1,\ x_1+2x_2+3,\ 4x_1+5x_2+6\right),$$
$$Cx=\left(x_1,\ x_1+2x_2+3x_3,\ 4x_1^4+5x_2+6x_3\right).$$

5. Пусть $x=\left\{x_1,x_2,x_3\right\}$, $Ax=\left\{x_2-x_3,\ x_1,\ x_1+x_3\right\}$, $Bx=\left\{x_2,2x_3,x_1\right\}$. Найти:

5.1. ABx.

5.2. A^2x.

5.3. $\left(A^2-B\right)x$.

5.4. B^4x.

5.5. B^2x.

5.6. $\left(2A+3B^2\right)x$.

5.7. $\left(A^2+B^2\right)x$.

6. Найти матрицу в базисе $\left(\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\right)$, где $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_2'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$, если она задана в базисе $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$.

6.1. $\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

6.2. $\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&4\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

6.3. $\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$.

6.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 6.5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6.6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

XII. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

7.1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 7.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 7.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 7.5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 7.6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

XIII. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

8.1. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$.

8.2. $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$.

8.3. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$.

8.4. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-2x_3^2$.

8.5. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.

8.6. $x_1^2+4x_1x_2+4x_2x_3+x_3^2$.

8.7. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$.

9. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

9.1. $4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

9.2. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$.

9.3. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

9.4. $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$.

9.5. $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

9.6. $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2\sqrt{3}x_2x_3$.

9.7. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

10. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

10.1. $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$.

10.2. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.

10.3. $4xy+4x-4y=0$.

10.4. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$.

10.5. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$.

10.6. $-2xy-2x-2y+1=0$.

10.7. $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0$.

XIV. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

1. Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+x-6}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+1}{2x^2-4x-3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+2x^2-x}{3x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$; 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x}{5x^2+1}$; 10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2}{2x^2+x+1}$;

11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x+3x^3}{4x^2+6x+5}$; 12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2+x-3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$; 14. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[2]{x^3+x}-x}$; 18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$; 20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{2x+1}$;

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 22. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

23. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}\right)$; 24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$; 27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x+2}$;

28. $\lim\limits_{x\to\infty}(6x+5)[\ln(3x+2)-\ln(3x-1)]$; 29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$; 31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$;

32. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)[\ln(x-2)-\ln(x+1)]$; 33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$;

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{arctg 2x}$; 35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}$;

36. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; 37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$;

38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$; 39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$; 40. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

2. Сравнить данные бесконечно малые величины в заданной точке.

а) $\alpha(x)=\sqrt{1+x^3}-1$ и $\beta(x)=x$ при $x_0=0$.

б) $\alpha(x)=\cos 3x-\cos x$ и $\beta(x)=x$ при $x_0=0$.

в) $\alpha(x)=e^{x}-1$ и $\beta(x)=x$ при $x_0=0$.

г) $\alpha(x)=\ln\left(1+x^{2}+x^{3}\right)$ и $\beta(x)=x$ при $x_0=0$.

3. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые величины.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tg3x}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 2x}{(arctg4x)^{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 2x}$.

4. В задачах необходимо найти точки разрыва функции и исследовать их характер.

1.

а) $y=4^{\frac{1}{x-1}}$; б) $y=arctg\dfrac{1}{x-2}$;

в) $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$; г) $y=arctg\dfrac{1}{x}$.

2.

а) $y=\begin{cases}2+x, & x>0,\\ 2^{\frac{1}{x+1}}, & x\le 0.\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}3-2x, & x>0,\\ 3^{\frac{1}{x+1}}, & x<0.\end{cases}$

в) $y=\begin{cases}\sqrt{3}-x, & x>0,\\ 3^{\frac{1}{x+2}}, & x\le 0.\end{cases}$ г) $y=\begin{cases}x^{2}, & x>0,\\ 3^{\frac{1}{3+x}}, & x\le 0.\end{cases}$

3. Исследовать на непрерывность и построить график функции

а) $y = \begin{cases} 2x, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ -3, & x > \pi. \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2 - x, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ x - \pi, & x > \pi. \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x^3 - 1, & x \le 1, \\ \dfrac{2}{x}, & 1 < x < 4, \\ x - 3, & x \ge 4. \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \le 1, \\ x - 1, & 1 < x \le 3, \\ x^2 - 3, & x > 3. \end{cases}$

XV. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В задачах найти производные:

1. $y = \sin 3x^2 - tg\sqrt{x}$;
2. $y = arcctg\dfrac{1}{x} \cdot \ln^3 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;
3. $y = \dfrac{e^{x^3}}{\cos^2 5x}$;
4. $y = \cos\dfrac{4x^4 - 2x^3}{\sqrt{1 - x}}$;
5. $y = \log_2 \sin^2 x$;
6. $y = \arcsin\ln\dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}}$;
7. $y = \ln^5\left(2x^4 - x\,arctg 3x\right)$;
8. $y = (\arcsin x)^{\frac{1}{x}}$;
9. $y = x^{\ln x}$;
10. $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x - 2}}{\sqrt[5]{(x - 3)^2}}$;

11. $y = tg\frac{5}{x} - \cos 7x^4$; 12. $y = arctg\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$;

13. $y = \arcsin^4 3x^2 \cdot \log_2 \frac{1}{\sqrt{x}}$; 14. $y = e^{\left(\arccos\sqrt{1-x^2+\sin^2 3x}\right)^3}$;

15. $y = \frac{ctg^3 2x^4}{3^{\sqrt[3]{x}}}$; 16. $y = (\ln x)^x$;

17. $y = \ln\frac{\sqrt{x^3 - 3x}}{x+5}$; 18. $y = x^2 e^{x^2} \cdot \ln x$;

19. $y = tg\ln\frac{2x+1}{4}$; 20. $y = \frac{(x-2)^2\sqrt{x+1}}{(x-5)^3}$;

21. $y = \cos\left(4x + \frac{1}{x}\right) - \arcsin\sqrt{x}$; 22. $y = e^{\arcsin^2} x^3 + \cos\ln x$;

23. $y = tg^6 3x^2 \cdot \log_2 \frac{3}{x^3}$; 24. $y = 3^{-\left(x^3 + ctg^7 5x\right)^4}$;

25. $y = \frac{e^{3x^2}}{\sqrt{\sin 2x}}$; 26. $y = (tg3x)^{ctgx}$;

27. $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; 28. $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$;

29. $y = arctg\ln\frac{1}{x}$; 30. $y = \frac{xe^{-x^2} arctgx}{\ln x}$;

31. $y = tg\frac{1}{x^5} + \arcsin\left(\sqrt{x} + x^3\right)$; 32. $y = e^{arctg\sqrt[2]{2x-1}}$;

33. $y = \sqrt{\sin x^3} \cdot \log_2 x^3$; 34. $y = \left(5^{tg2x} - x^2\right)^3$;

35. $y = \frac{e^{3x^2}}{\cos^5 2x^2}$; 36. $y = \left(x^2 + 3\right)^{\sqrt{x}}$;

37. $y = arctg\frac{2x^7}{1-x^8}$; 38. $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arccos 2x}$;

39. $y = \ln\cos 5^{x^2}$;

40. $y = \dfrac{\left(1 - x^2\right) \cdot e^{3x} \cdot \sin 2x}{x^2}$.

XVI. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.

XVI.1

а) Будет ли выполняться теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 6x + 100$, если $a = 1$; $b = 5$? При каком значении γ?

б) Найти координаты точки *M* на дуге *AB* кривой $y = 2x - x^2$, в которой касательная параллельна хорде *AB*, если *A* (1; 1) и *B* (3; -3). Применить теорему Лагранжа.

в) Будет ли выполняться теорема Ролля для функции $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$, если $a = 0$, $b = 8$? При каком значении γ?

г) Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2};\ 2\right]$. Найти промежуточное значение γ.

д) Проверить выполнение условий теоремы Коши для функции $f(x) = \cos x$ и $\varphi(x) = \sin x$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Найти промежуточное значение γ.

XVI.2 Найти пределы, применяя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; е) $\lim\limits_{x\to0}(x^2\cdot\ln x)$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}(x\cdot ctg\pi x)$; з) $\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x\cdot ctgx)$;

и) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\cdot ctgx$; к) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$;

н) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{3/x^2}$; о) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$;

п) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}$.

XVII. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

XVII.1 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

а) $y=\ln\left(x^2+2x+5\right)$; б) $y=2-\sqrt[3]{x+4}$;

в) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; г) $y = (x+3)^3$;

д) $y = 2 + \dfrac{12}{x^2 - 4}$; е) $y = 2x\mathring{a}^{-x}$;

ж) $y = x - \ln x$; з) $y = 3 - \sqrt[3]{x+1}$;

и) $y = x^3 - 6x^2 + 2$; к) $y = x - \ln(x+3)$.

XVII. 2 Найти асимптоты графика функции.

а) $y = \mathring{a}^{\frac{2}{x}}$; б) $y = x + \dfrac{1}{x-2}$;

в) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; г) $y = \mathring{a}^{\frac{1}{x+1}}$;

д) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; е) $y = x - 1 + \mathring{a}^{-x}$;

ж) $y = x + \sin x$; з) $y = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$;

и) $y = x\mathring{a}^{-x^2}$; к) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$.

XVIII. ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

XVIII. 1. Найти неопределенные интегралы.

1. $\int (4-3x)e^{-3x}dx.$ 2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx.$

3. $\int (3x+4)e^{3x}dx.$

4. $\int (4x-2)\cos 2x dx.$

5. $\int (4-16x)\sin 4x dx.$

6. $\int (5x-2)e^{3x}dx.$

7. $\int (1-6x)e^{2x}dx.$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

9. $\int \frac{1+\ln x}{x}dx.$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

11. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

13. $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

14. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$

15. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx.$

16. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

17. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx.$

18. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$

19. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx.$

20. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$

21. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

22. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

23. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx.$

24. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

25. $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

26. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx.$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2\left(x^2+x+1\right)}dx.$

32. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx.$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2\left(x^2+2x+3\right)}dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2\left(x^2+2\right)}dx.$

36. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx.$

37. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}}{x^2\sqrt[9]{x}}dx.$

XVIII. 2. Вычислить определенные интегралы.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x dx.$

2. $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\cos 3x dx.$

3. $\int_{-1}^{0}\left(x^2+4x+3\right)\cos x dx.$

4. $\int_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3x dx.$

5. $\int_{-4}^{0}\left(x^2+7x+12\right)\cos x dx.$

6. $\int_{0}^{\pi}\left(2x^2+4x+7\right)\cos 2x dx.$

7. $\int_{0}^{\pi}\left(9x^2+9x+11\right)\cos 3x dx.$

8. $\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

9. $\int_{0}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}.$

10. $\int_{0}^{1}\frac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx.$

11. $\int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{x^2+4}.$

12. $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

13. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx.$

14. $\int_{0}^{1/2}\frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

15. $\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2}\frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}.$

16. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{2+\cos x}.$

17. $\int_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg} 2}\frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}.$

18. $\int_{2\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}.$

19. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx.$

20. $\int_{2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3}\frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}.$

21. $\displaystyle\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/3)}^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}.$

22. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \frac{dx}{(3\,\mathrm{tg}\,x+5)\sin 2x}.$

23. $\displaystyle\int\limits_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}dx.$

24. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos(1/\sqrt{17})} \frac{3+2\,\mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\,dx.$

25. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \frac{4\,\mathrm{tg}\,x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}dx.$

26. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{(8+\mathrm{tg}\,x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}dx.$

27. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{\mathrm{tg}\,x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}dx.$

28. $\displaystyle\int\limits_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6\,\mathrm{tg}\,x dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}.$

29. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8\sin^8 x\; dx.$

30. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\sin^6 x\cos^2 x\; dx.$

31. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x\cos^4 x\; dx.$

32. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2(x/4)\cos^6(x/4)\; dx.$

33. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\cos^8(x/2)\; dx.$

34. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8\sin^8 x\; dx.$

35. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^4\sin^6 x\cos^2 x\; dx.$

36. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{\left(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(3x+1)^2}\,dx.$

37. $\displaystyle\int\limits_{1}^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$

38. $\int\limits_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}dx.$

39. $\int\limits_{6}^{9} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx.$

40. $\int\limits_{0}^{5} e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$

41. $\int\limits_{8}^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}dx.$

42. $\int\limits_{0}^{1} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$

43. $\int\limits_{0}^{16} \sqrt{256-x^2}dx.$

44. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

45. $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$

46. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$

47. $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

48. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

49. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

XVIII. 3. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y=(x-2)^3,$
   $y=4x-8.$

2. $y=x\sqrt{9-x^2}, \quad y=0,$
   $(0\le x\le 3).$

3. $y=4-x^2,$
   $y=x^2-2x.$

4. $y=\sin x\cos^2 x, \quad y=0,$
   $(0\le x\le \pi/2).$

5. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad y=0,$
   $x=0, \quad x=1.$

6. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, \quad y=0,$
   $(0\le x\le 2).$

7. $y=\cos x\sin^2 x, \quad y=0,$
$\left(0\le x\le \pi/2\right).$

8. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x=2 \quad \left(x\ge 2\right).$

9. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y=2 \quad \left(y\ge 2\right).$

10. $\begin{cases} x=4\left(t-\sin t\right), \\ y=4\left(1-\cos t\right), \end{cases}$
$y=4 \quad \left(0<x<8\pi, \ \ y\ge 4\right).$

11. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$
$x=2 \quad \left(x\ge 2\right).$

12. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$
$y=3 \quad \left(y\ge 3\right).$

13. $\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right), \\ y=2\left(1-\cos t\right), \end{cases}$
$y=3 \quad \left(0<x<4\pi, \ \ y\ge 3\right).$

14. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$
$x=6\sqrt{3} \quad \left(x\ge 6\sqrt{3}\right).$

15. $r=4\cos 3\varphi, \quad r=2 \quad \left(r\ge 2\right).$

16. $r=\cos 2\varphi.$

17. $r=\sqrt{3}\cos\varphi, \quad r=\sin\varphi,$
$\left(0\le \varphi\le \pi/2\right).$

18. $r=4\sin 3\varphi, \quad r=2 \quad \left(r\ge 2\right).$

19. $r=2\cos\varphi, \quad r=2\sqrt{3}\sin\varphi,$
$\left(0\le \varphi\le \pi/2\right).$

20. $r=\sin 3\varphi.$

21. $r=6\sin 3\varphi, \quad r=3 \quad \left(r\ge 3\right).$

XVIII. 4. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1. $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

2. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}, \quad 1 \le x \le 2.$

3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le 7/9.$

4. $y = \ln \dfrac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

5. $y = -\ln \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6.$

6. $y = \mathrm{e}^x + 6, \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}.$

7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad 1/4 \le x \le 1.$

8. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

9. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

10. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

11. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

12. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

13. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t(\cos t + \sin t), \\ y = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

14. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$

$$\pi \le t \le 2\pi.$$

15. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

16. $\rho = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

17. $\rho = \sqrt{2}\, e^{\varphi}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

18. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

19. $\rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

20. $\rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

21. $\rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

XVIII.5. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

1. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1, \ \ z = y, \ \ z = 0 \quad (y \ge 0).$

2. $z = x^2 + 4y^2, \ \ z = 2.$

3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1, \ \ z = 0, \ \ z = 3.$

4. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = -1, \ \ z = 12.$

5. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \ \ z = 1, \ \ z = 0.$

6. $x^2+y^2=9,\ \ z=y,\ \ z=0\ \ (y\ge 0).$

7. $z=x^2+9y^2,\ \ z=3.$

XVIII.6. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций.

Ось вращения Ox.

1. $y=-x^2+5x-6,\quad y=0.$

2. $2x-x^2-y=0,\ \ 2x^2-4x+y=0.$

3. $y=3\sin x,\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le \pi.$

Ось вращения Oy.

4. $y=\arccos(x/3),\quad y=\arccos x,\quad y=0.$

5. $y=\arcsin(x/5),\quad y=\arcsin x,\quad y=\pi/2.$

6. $y=x^2,\quad x=2,\quad y=0.$

7. $y=x^2+1,\quad y=x,\quad x=0,\quad y=0.$

XVIII.7. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (см. рисунок). Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2.

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

1. $a=4{,}5$ м, $b=6{,}6$ м, $h=3{,}0$ м..

2. $a = 4{,}8$ м, $b = 7{,}2$ м, $h = 3{,}0$ м.

XVIII.8. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_з = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2.

1. $m = 7{,}0$ т, $H = 200$ км. 2. $m = 7{,}0$ т, $H = 250$ км.

3. $m = 6{,}0$ т, $H = 300$ км.

XVIII.9. Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (см. рисунок).

Указание. Уравнение состояния газа $pV = \mathrm{const}$, где p – давление, V – объем.

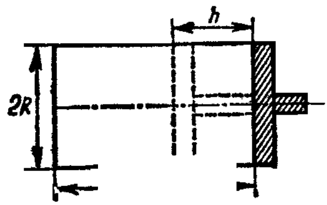

Рис. 3

1. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}35$ м, $R = 0{,}1$ м.

2. $H = 0{,}4$ м, $h = 0{,}3$ м, $R = 0{,}1$ м.

XIX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

XIX.1. Найти частные производные и вычислить их значения в заданных точках.

а) $z = \dfrac{x^3}{y^3} - \dfrac{x^2}{y^2}$ $\quad A(2;1)$;

б) $\cos^4(3x+2y)$ $\qquad B(\frac{\pi}{3};0)$;

в) $z=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}$ $\qquad A(0;2)$;

г) $z=e^{xy(x^2+y^2)}$ $\qquad B(1;1)$;

д) $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$, $A(-1;1)$;

е) $z=e^{-\frac{x^2}{y}}$, $B(-1;2)$.

XIX.2. Найти производные второго порядка функции:

а) $z=\sin^2(2x+3y)$;

б) $z=x\ln\frac{y}{x}$;

в) $z=x^3+2x^2y^5+y$;

г) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

д) $z=\cos(x+y)$;

е) $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$;

ж) $z=x\ell^{-xy}$;

з) $z=\sin x\sin y$;

и) $z=x^3y^2+x\sin y$;

к) $z=\sqrt{2xy+y^2}$;

л) $z=\frac{x^2}{2y-3}$;

м) $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$.

XIX.3. Показать, что функция удовлетворяет равенству.

а) $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

б) $z = x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - y^2 - x^2$.

в) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

г) $z = ctg(x^2 + y^2)$ $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

д) $z = e^{\cos x}\sin y$ $\quad z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

е) $z = \ln x + \dfrac{y}{x}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

ж) $z = x\sin(x - y)$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

з) $z = \ln(e^x + e^y)$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

и) $z = \dfrac{\sin(x + 3y)}{e^{x+3y}}$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

к) $u = e^{x/y}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

л) $z = 2\cos^2\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$ $\quad 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

м) $z = \ln(x^2 + y^2)$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

XIX.4. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке.

а) $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1; 2; 5)$.

б) $z = e^{x\cos y}$ в точке $M\left(1;\,\pi;\,\dfrac{1}{e}\right)$.

.

в) $z = arctg\dfrac{y}{x}$ в точке $M\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

г) $z = y + \ln\dfrac{x}{z}$ в точке $M(1;1;1)$.

д) $z = \sin x \cdot \cos y$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

е) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ в точке M (2; 2; 3).

ж) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке M (2; 2; 1).

з) $2z = x^2 - y^2$ в точке M (3; 1; 4).

и) $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке M (1; 1; 3).

к) $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке M (1; 0; 0).

л) $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$ в точке M (1; 0; -1).

м) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$ в точке M (1; 2; 1).

XIX.5. а) Вычислить производную функции $u = y\ln(1 + x^2) - arctgz$ в точке $M(0;1;1)$ в направлении вектора $\vec{\lambda} = 2\vec{i} - 3\vec{y} - 2\vec{k}$.

б) Вычислить производную функции $u = x(\ln y - arctgz)$ в точке $M(-2;1;-1)$ и направлении вектора $\vec{\lambda} = 8\vec{i} + 4\vec{y} + 8\vec{k}$.

в) Вычислить производную функции $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$ в точке $M(1;3;2)$ в направлении вектора $\vec{\lambda} = -\vec{i} + 2\vec{y} - 2\vec{k}$.

XIX.6. а) Найти угол между градиентами функций $u = x^2 - y^2 - 3x^2$ и $\upsilon = \frac{yz^2}{x}$ в точке $M(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}})$.

б) Найти угол между градиентами функций $u = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ и $\upsilon = x^2 yz^3$ в точке $M(2;\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{2})$.

в) Найти угол между градиентами функций $u = arctg\frac{x}{y}$ и $\upsilon = \frac{z \cdot x}{y}$ в точках $M_1(1;1)$ и $M_2(-1;-1)$.

XIX.7. Исследовать на экстремум функции.

а) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

б) $z = xy^2\left(1 - x - y\right)$, $x > 0$, $y > 0$.

в) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

г) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

д) $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

е) $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

ж) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

з) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

и) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

к) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

л) $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

м) $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$.

Литература.

1. А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк Математический анализ : Справочное пособие. – Мн., Выш. школа, 1989, 287 с.
2. А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Мн. Выш. школа, 1990, - 270 с.
3. Е.И. Гурский Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. – Мн. : Выш. школа, 1982, - 272 с.
4. Р.М. Жевняк, А.А. Карпук Высшая математика : Учеб. – Мн, Выш. школа, 1992, - 384 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник заданий

для студентов уровня высшего образования
всех специальностей

Составители:
Рябенкова Людмила Александровна
Теслюк Владимир Николаевич

Редактор *Е. Б. Левенкова*
Компьютерная верстка *Ю. С. Новик*

План 2010/2011 уч. г., поз. 15

Подписано в печать ……. Формат 60*84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Печать цифровая.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 50 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Высший государственный колледж связи»
ЛИ № 02330/0131902 от 03.01.2007.
Ул. Ф. Скорины, 8/2, 220114, г. Минск