

Аналитическая геометрия и векторная алгебра

Задание:

1. Найти $A + \alpha B + \beta C$.
2. Найти AB , предварительно проверив, что умножение возможно.
3. найти обратную матрицу. Проверить выполнение условий $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
4. решить систему уравнений матричным способом.

Вариант 1

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответы: } 1) \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 14 & 21 & 2 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 46 & 18 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 1/3 & -2/3 \\ -2 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{matrix} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{matrix}.$$

Вариант 2

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{matrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{ОТВЕТЫ: } 1) \begin{pmatrix} & -1 & -7 \\ -6 & 10 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -8 & 14 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} 5/3 & -1 & -1/3 \\ -7/3 & 2 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = 2$$

$$4) y = -1.$$

$$z = -3$$

Вариант 3

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{matrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{Ответы: 1) } \begin{pmatrix} -5 & 5 & -6 \\ -2 & -6 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 20 & 2 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix},$$

$$x = 2$$

$$4) y = -1.$$

$$z = 0$$

Вариант 4

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{matrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ответы: 1) } \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} 34 & 34 & 13 \\ 28 & 31 & 12 \\ 62 & 71 & 20 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} -7/2 & 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/2 & -3/2 & -7/2 \end{pmatrix}, 4) \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1. \\ z = -3 \end{matrix}$$

Вариант 5

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \end{matrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответы: } 1) \begin{pmatrix} -5 & 6 & -2 & 9 \\ 9 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 11 & 3 & -10 \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} -7/2 & 1/2 & 5/2 \\ 5/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, 4) \begin{matrix} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{matrix}.$$

Задание:

- Даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{M_1M_2}$.
- Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку M_1 и
 - параллельна данной плоскости;
 - перпендикулярна двум данным плоскостям.
- Вычислить расстояние между данными плоскостями.

Вариант 1

1. $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -2; -1)$.

Ответ: $x - y - 3z + 2 = 0$.

2. $M_1(3; -2; -7)$ а) $2x - 3z + 5 = 0$,

б) $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

Ответ: а) $2x - 3z - 27 = 0$; б) $7x - y + 5z + 53 = 0$.

3. $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

ОТВЕТ: $d = 2$.

Вариант 2

1. $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(3; 2; 1)$.

ОТВЕТ: $x + 3y - 2z + 7 = 0$.

2. $M_1(1; 4; 0)$ а) $3x - y + 2z - 5 = 0$,

 б) $2x - y + z + 2 = 0$, $x - 4y + 2z - 7 = 0$.

ОТВЕТ: а) $3x - y + 2z + 1 = 0$, б) $2x - 3y - 7z + 10 = 0$.

3. $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z - 21 = 0$.

ОТВЕТ: $d = 3,5$.

Вариант 3

1. $M_1(0; 2; 1)$, $M_2(2; -3; 2)$.

ОТВЕТ: $2x - 5y + z + 9 = 0$.

2. $M_1(1; -3; 2)$ а) $2x - y + 2z - 7 = 0$,

 б) $x + y + z - 6 = 0$, $2x - 3y + 4z + 5 = 0$.

ОТВЕТ: а) $2x - y + 2z - 9 = 0$, б) $7x - 2y - 5z - 3 = 0$.

3. $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

ОТВЕТ: $d = 6,5$.

Вариант 4

1. $M_1(1; -2; 4)$, $M_2(3; 2; 3)$.

ОТВЕТ: $2x + 4y - z + 10 = 0$.

2. $M_1(3; -2; 1)$ а) $x - 4y + 5z - 6 = 0$,

 б) $x - 4y + 5z - 6 = 0$, $x - 2z + 2 = 0$.

ОТВЕТ: а) $x - 4y + 5z - 16 = 0$, б) $8x + 7y + 4z - 14 = 0$.

3. $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $16x + 12y - 15z + 25 = 0$.

ОТВЕТ: $d = 1$.

Вариант 5

1. $M_1(-1; 2; 0)$, $M_2(1; 4; 2)$.

ОТВЕТ: $x + y + z - 1 = 0$.

$$3. \left. \begin{aligned} \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad & x+3y+z+2=0 \\ & x-y-3z-2=0 \end{aligned} \right\}$$

Ответ: $\varphi = 0$.

$$4. M_0(-1;3;2) \quad 2x-z+2=0 \quad (\alpha).$$

Вариант 3

$$1. M_0(2;-3;1) \quad \vec{s} = (3;-1;2).$$

$$2. \left. \begin{aligned} x+y-6z+3=0 \\ 3x+4y-5z-4=0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x-3}{19} = \frac{y}{-13} = \frac{z-1}{1}.$$

$$3. \left. \begin{aligned} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad & 3x+y-5z+1=0 \\ & 2x+3y-8z+3=0 \end{aligned} \right\}$$

Ответ: $\varphi = 0$.

$$4. M_0(3;2;1) \quad 2x-y+4z+3=0 \quad (\alpha).$$

Вариант 4

$$1. M_0(-3;1;2) \quad \vec{s} = (-1;0;2).$$

$$2. \left. \begin{aligned} 2x-y+2z+3=0 \\ 3x-2y+3=0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{-1}.$$

$$3. \left. \begin{aligned} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \quad \text{и} \quad & x+y-3z+1=0 \\ & x-y+z+3=0 \end{aligned} \right\}$$

Ответ: $\varphi = 0$.

$$4. M_0(0;-2;1) \quad 3x-2y+4z-1=0 \quad (\alpha).$$

Вариант 5

$$1. M_0(2;-1;0) \quad \vec{s} = (3;1;0).$$

$$2. \left. \begin{array}{l} x - 4z + 6 = 0 \\ 3x - 4y + z - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x-2}{16} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-2}{4}.$$

$$3. \left. \begin{array}{l} \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{3} \\ 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{array} \right\} \text{ и}$$

$$\text{Ответ: } \varphi = 90^\circ.$$

$$4. M_0(2;3;-1) \quad 3y + 4z - 6 = 0 \quad (\alpha).$$

Задание:

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно плоскости (α) , $Ax + By + Cz + D = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярной заданной прямой (l) .
3. Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(x_1; y_1; z_1)$ относительно данной плоскости α .
4. Найти угол между прямой (l) и плоскостью (α) .

Вариант 1

$$1. M_1(2;0;5) \quad (\alpha) \quad 2y - z + 1 = 0.$$

$$2. M_0(1;-2;1) \quad (l) \quad \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x + 2y + 3z = 0.$$

$$3. P(1;3;-4) \quad (\alpha) \quad 3x + y - 2z = 0$$

$$\text{Ответ: } Q(-5;1;0).$$

$$4. (l) \quad \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ z + 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad (\alpha) \quad 2x + 3y - z + 1 = 0$$

$$\text{Ответ: } \sin \varphi = \frac{5}{7}, \quad \varphi = 45,5^\circ.$$

Вариант 2

$$1. M_1(4;1;2) \quad (\alpha) \quad x - 4y + 2z - 5 = 0.$$

$$2. M_0(1;0;1) \quad (l) \quad \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x - z = 0$.

$$3. P(1;3;4) \quad (\alpha) \quad 3x + y - 2z + 16 = 0$$

ОТВЕТ: $Q(-5;1;8)$.

$$4. (l) \quad \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad (\alpha) \quad 3x + y - 2z = 0$$

ОТВЕТ: $\sin \varphi = 1 \frac{1}{\sqrt{154}}$, $\varphi = 4,62^\circ$.

Вариант 3

$$1. M_1(3;1;-2) \quad (\alpha) \quad x - z = 0.$$

$$2. M_0(1;0;-1) \quad (l) \quad \begin{cases} x - 2y - z + 5 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

$$3. P(-1;3;4) \quad (\alpha) \quad 3x + y - 2z - 6 = 0$$

ОТВЕТ: $Q(5;5;0)$.

$$4. (l) \quad \begin{cases} 2x + 3y - 3z - 5 = 0 \\ x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad (\alpha) \quad 2x - y + 2z - 3 = 0$$

ОТВЕТ: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 45^\circ$.

Вариант 4

$$1. M_1(1;4;-1) \quad (\alpha) \quad 2x + 7y - z + 9 = 0.$$

$$2. M_0(1;1;0) \quad (l) \quad \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x - z - 1 = 0$.

$$3. P(1;-1;1) \quad (\alpha) \quad x + y + z + 2 = 0$$

ОТВЕТ: $Q(-1;-3;-1)$.

$$4. (l) \quad \begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (\alpha) \quad x - y + 3 = 0$$

Ответ: $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^\circ$.

Вариант 5

1. $M_1(3;2;0)$ (α) $5x - y + 3z - 1 = 0$.

2. $M_0(0;1;1)$ (l) $\begin{cases} x + 8y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$

Ответ: $x - z + 1 = 0$.

3. $P(1;-1;1)$ (α) $x + y + z - 4 = 0$

Ответ: $Q(3;1;3)$.

4. (l) $\begin{cases} 3x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ (α) $x + z - 6 = 0$

Ответ: $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^\circ$.