ВЫСШИЙ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по дисциплине

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

часть V

для студентов-заочников всех специальностей

МИНСК 1999

Составители Гладков Л.Л.
Назарова И.В.

Приведены методические указания по самостоятельному изучению дисциплины «Высшая математика», а также задания на выполнение контрольной работы.

Предназначены для студентов всех специальностей.

Рецензент Дедок Н.Н.

Издание утверждено на заседании кафедры М и Ф
13 мая 1999 г. протокол №9

Зав. кафедрой Гладков Л.Л.

ВВЕДЕНИЕ

В седьмом семестре студенты ВКС по высшей математике выполняют контрольную работу №5.

Для того, чтобы ее успешно выполнить, необходимо изучить сначала теоретический материал по одному из учебников, указанных в списке литературы, и конспекту обзорных лекций. При этом следует ориентироваться на рабочую программу, приведенную ниже. Затем внимательно разберите решения примеров из данной методической разработки и выполните задания для самопроверки.

При оформлении контрольной работы для замечаний преподавателя оставляются поля. Перед решением задачи полностью записывается ее условие. Решение следует сопровождать короткими пояснениями с указанием использованных формул и теорем. Чертежи должны быть выполнены аккуратно. В конце работы ставится дата ее завершения, приводится список проработанной литературы. Работа подписывается.

Выбор варианта контрольной работы определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки. Получив проверенную работу, студент обязан выполнить указания, сделанные рецензентом. Если работа не зачтена, следует сделать работу над ошибками в той же тетради и представить работу на повторную рецензию.

К сдаче экзамена или зачета допускаются студенты, имеющие на руках зачтенные контрольные работы.

Таблица

Варианты контрольных заданий

№ варианта	№№ задач					
1	1	11	21	31	41	51
2	2	12	22	32	42	52
3	3	13	23	33	43	53
4	4	14	24	34	44	54
5	5	15	25	35	45	55
6	6	16	26	36	46	56
7	7	17	27	37	47	57
8	8	18	28	38	48	58
9	9	19	29	39	49	59
10	10	20	30	40	50	60
11	1	12	23	34	45	56
12	2	13	24	35	46	57
13	3	14	25	36	47	58
14	4	15	26	37	48	59
15	5	16	27	38	49	60
16	6	17	28	39	50	51
17	7	18	29	40	41	52
18	8	19	30	31	42	53
19	9	20	21	32	43	54
20	10	11	22	33	44	55
21	10	19	28	37	46	54
22	9	18	27	36	45	53
23	8	17	26	35	44	52
24	7	16	25	34	43	51
25	6	15	24	33	42	60
26	5	14	23	32	41	59
27	4	13	22	31	50	58
28	3	12	21	40	49	57
29	2	11	30	39	48	56
30	1	20	29	38	47	55

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дифференциальное исчисление функции многих переменных

1. Функция двух переменных и способы ее задания, геометрический смысл, линии уровня. Функции нескольких переменных.
2. Непрерывность функции нескольких переменных. Формулировка основных свойств непрерывной функции. Точки и линии разрыва.
3. Частные производные I - ого и II - ого порядков для функции двух переменных.
4. Полное приращение функции двух переменных. Выражение полного приращения через частные производные. Определение полного дифференциала.
5. Частные производные сложных функций.
6. Дифференцирование функции, заданной неявно.
7. Определение экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Формулировка достаточных условий.
8. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
9. Определение производной по направлению, ее вычисление.
10. Градиент, его физический и геометрический смысл.

Кратные и криволинейные интегралы

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла при помощи повторного интегрирования. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
2. Представление о тройном интеграле.
3. Задача о работе при перемещении точки в силовом поле. Определение криволинейного интеграла II рода. Векторная форма записи криволинейного интеграла. Вычисление криволинейного интеграла. Условие независимости интеграла от пути.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. т.2.- М.: Наука, 1976 (и последующие издания).
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Функция многих переменных. Интегральное исчисление. - Мн., Вышэйшая школа, 1993.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1974.
4. Руководство к решению задач по высшей математике. /Под ред. Гурского Е.И. Части 1 и 2. - Мн.: Вышэйшая школа, 1989.
5. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1967.
6. Сборник задач по общему курсу высшей математики. Под редакцией Яблонского А.И. Минск. Вышэйшая школа. 1994 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть каждой упорядоченной паре чисел (x,y) из некоторой области $D(x,y)$ соответствует определенное число $z \in E \subset R$.. Тогда z называется функцией двух переменных x и y. Символически функция двух переменных записывается в виде равенства $z=f(x,y)$; x и y называются **аргументами функции** или **независимыми переменными**, ***D*** **- областью определения функции**, а множество E всех значений функции называется **областью значений функции.**

Пример 1. Площадь треугольника $S=xy/2$, с основанием x и высотой y есть функция двух переменных x и y, определенная в области $x>0$ и $y>0$.

Графиком функции двух переменных будем называть поверхность, образованную множеством точек $M(x,y,z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z=f(x,y)$.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай 3-х и большего числа переменных.

Величина u называется функцией переменных $x_1,x_2,...,x_n$, если каждой совокупности $(x_1,x_2,...x_n)$ переменных $x_1,x_2,...,x_n$ из некоторой области n- мерного пространства соответствует определенное значение u, что записывается в виде

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

2.ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Число A называется **пределом** функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при всех x, y, удовлетворяющих условиям $|x-x_0| \lhd \delta$ и $|y-y_0| \lhd \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x,y) - A| \lhd \varepsilon.$$

Пусть A - предел функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, тогда принято обозначение

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{M \to M_0} f(x,y).$$

Функция $z=f(x,y)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$**,** если имеет место равенство:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Функция $z=f(x,y)$ непрерывная в каждой точке M области D называется **непрерывной в области** ***D***. Точка $M \in D$, в которой функция $z=f(x,y)$ не определена или определена, но не является непрерывной в ней, называется точкой разрыва функции $z=f(x,y)$.

Пример 2. Функция $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки $M(0,0)$, в которой функция не определена.

3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть $z=f(x,y)$ - функция двух переменных и $M_0(x_0, y_0)\in D$. Придадим переменным x_0 и y_0 приращения Δx и Δy, соответственно, получим точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, где D - область определения функции $f(x,y)$.

Полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется выражение

$$\Delta z(M_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(M)-f(M_0).$$

Пусть задана функция двух переменных $z=f(x,y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ - некоторая внутренняя точка области определения функции. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

то он называется **частной производной функции $f(x,y)$ в точке $M_0=(x_0,y_0)$ по переменной x** и обозначается $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$ или $f'_x(M_0)$, или $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, или $z'_x(M_0)$.

Аналогично, **частной производной функции $f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0=(x_0,y_0)$ называется предел**

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

если он существует.

Частная производная по y в точке M_0 обозначается $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$ или $f'_y(M_0)$, или $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$ или $z'_y(M_0)$.

Частная производная - это производная функции одной переменной при фиксированных значениях остальных переменных.

Пример 3. Найти частные производные функции $z=arctg\frac{y}{x}$.

Решение.

$$z_x{}'=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Пример 4. Найти частные производные функции

$$u = 3x^2yz - 4z^2 + 7zy + x + 2y + 7.$$

Решение.

Находим

$$u'_x = 6xyz + 1, \ u'_y = 3x^2z + 7z + 2, \quad u'_z = 3x^2y - 8z + 7y.$$

4. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Полным приращением функции называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Главная часть полного приращения функции $z=f(x,y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется **полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$** и обозначается dz.

Если функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

где $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Для функции n переменных $u=f(x_1, x_2,...,x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$du = u'_{x_1} dx_1 + u'_{x_2} dx_2 + ... + u'_{x_n} dx_n.$$

Пример 5. Найти полный дифференциал функции

$$Z = arctg\frac{y}{x}.$$

Решение.

Частные производные были найдены нами в примере 3:

$$Z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$Z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Тогда по формуле для дифференциала функции двух переменных, получаем:

$$dz = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Пример 6. Найти полный дифференциал функции $u = x^2y^3z$.

Найдем сначала частные производные:

$$u'_x = 2xy^3z, \ u'_y = 3x^2y^2z, \ u'_z = x^2y^3.$$

Тогда по формуле для дифференциала функции n переменных:

$$du = 2xy^3zdx + 3x^2y^2zdy + x^2y^3dz$$

5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$Z''_{xx} = (Z'_x)'_x,\ Z''_{yy} = (Z'_y)'_y,\ Z''_{xy} = (Z'_x)'_y,\ Z''_{yx} = (Z'_y)'_x.$$

Частные производные Z''_{xy} и Z''_{yx} называют **смешанными**. Значения смешанных производных равны в точках, в которых эти производные непрерывны $Z''_{xy} = Z''_{yx}$,

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков.

Пример 7. Найти $Z''_{xx}, Z''_{yy}, Z''_{xy}$ функции $Z = arctg\dfrac{y}{x}$.

Решение.

Частные производные первого порядка были найдены в примере 3:

$$Z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2},\ Z'_y = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$Z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$Z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$Z''_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Пример 8. Найти $Z''_{xx}, Z''_{yy}, Z''_{xy}$ функции $Z = e^x\left(sin\, y + cos\, x\right)$.

Решение. Вычислим сначала Z'_x, Z'_y:

$$Z'_x = (e^x)'_x\left(sin\, y + cos\, x\right) + e^x\left(sin\, y + cos\, x\right)'_x =$$
$$= e^x\left(sin\, y + cos\, x\right) - e^x\ sin\, x = e^x\left(sin\, y + cos\, x - sin\, x\right),$$
$$Z'_y = e^x(sin\, y + cos\, x)'_y = e^x\ cos\, y.$$

Тогда $Z''_{xx} = \left(e^x\left(sin\, y + cos\, x - sin\, x\right)\right)'_x = e^x\left(sin\, y + cos\, x - sin\, x\right) +$

$$+e^x\left(-\sin x-\cos x\right)=e^x\left(\sin y-2\sin x\right),$$

$$Z''_{yy}=\left(e^x\cos y\right)'_y=-e^x\sin y,$$

$$Z''_{xy}=Z''_{yx}=\left(e^x\cos y\right)'_x=e^x\cos y.$$

6. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $Z=f(x,y)$, если для всех точек $M(x,y)$, отличных от $M_0(x_0,y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство

$$f\left(x_0,y_0\right)\geq f\left(x,y\right)\quad\left(f\left(x_0,y_0\right)\leq f\left(x,y\right)\right)$$

Максимум или минимум функции называется ее **экстремумом** . Точка в которой достигается экстремум, называется **точкой экстремума**.

7. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

I. Необходимые условия экстремума.

Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции $Z=f(x,y)$, то $Z'_x(x_0,y_0)=Z'_y(x_0,y_0)=0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки для которых эти условия выполнены, называются **стационарными** или **критическими.**

Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Для формулировки достаточных условий экстремума функции двух переменных, введем обозначения:

$$A=Z''_{xx}(x_0,y_0),\ B=Z''_{xy}(x_0,y_0),\ C=Z''_{yy}(x_0,y_0),\ \Delta=AC-B^2.$$

II. Дополнительные условия экстремума.

Пусть функция $Z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0,y_0)$.

Тогда:

1) если $\Delta>0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A<0$ $(C<0)$ и точкой минимума при $A>0$ $(C>0)$;

2) если $\Delta<0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta=0$, то экстремум может быть, а может и не быть, т.е. требуются дополнительные исследования.

Практически, исследование функции двух переменных на экстремум требует выполнения следующих действий:

1) Найти стационарные точки для функции $Z=f(x,y)$, т.е. решить систему:

$$\begin{cases} Z'_x = 0, \\ Z'_y = 0. \end{cases}$$

2)Вычислить

$$Z''_{xx}(x_0,y_0),\ Z''_{xy}(x_0,y_0),\ Z''_{yy}(x_0,y_0),$$

$$\Delta = Z''_{xx}(x_0,y_0)\cdot Z''_{yy}(x_0,y_0) - (Z''_{xy}(x_0,y_0))^2.$$

Затем по знаку Δ выяснить, имеется ли экстремум в точке (x_0,y_0), а по знаку $Z''_{xx}(x_0,y_0)$ выяснить является ли точка (x_0,y_0) точкой локального максимума или локального минимума.

Пример 9. Найти экстремум функции двух переменных

$$Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

Решение.

1) Найдем $Z'_x=3x^2-6y$, $Z'_y=24y^2-6x$

Для нахождения стационарных точек составим систему:

$$\begin{cases} Z'_x = 0, \\ Z'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y, \\ 4y^2 = x. \end{cases}$$

Подставим $x=4y^2$ в первое уравнение системы:

$$16y^4=2y,\ 8y^4-y=0,\ y(8y^3-1)=0.$$

Отсюда $y(2y-1)(4y^2+2y+1)=0$, $y_1=0$, $x_1=0$, $y_2=0{,}5$, $x_2=1$.

Получили 2 стационарные точки $M_1(0;0)$, $M_2(1;0{,}5)$.

2) Вычислим $Z''_{xx},\ Z''_{yy},\ Z''_{xy}$:

$$Z''_{xx} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x,\ Z''_{xy} = (3x^2 - 6y)'_y = -6,\ Z''_{yy} = (24y^2 - 6x)'_y = 48y.$$

Вычислим значения $Z''_{xx},\ Z''_{yy},\ Z''_{xy}$ в стационарной точке $M_1(0;0)$:

$$Z''_{xx}(0{,}0) = 0,\ Z''_{xy}(0{,}0) = -6,\ Z''_{yy}(0{,}0) = 0.$$

Тогда $\Delta=0-36=-36<0$, следовательно в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

Вычислим значения $Z''_{xx},\ Z''_{yy},\ Z''_{xy}$ во второй стационарной точке $M_2(1;0{,}5)$:

$Z''_{xx}=6,\ Z''_{xy}=-6,\ Z''_{yy}=48\cdot 0.5=24, \Delta=24\cdot 6-36=108>0,$ в точке $M_2(1;0,5)$ есть экстремум. Т.к. $Z''_{xx}=6>0$, то точка $M_2(1;0,5)$ - точка локального минимума.

Вычислим $Z_{min}(1;0,5)$

$$Z_{min}=1^3+8(0,5)^3-6\cdot 1\cdot 0,5+5=4.$$

8. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть функция $U(x,y,z)$ определена в некоторой области D, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D,\quad M_1(x_1,y_1,z_1)\in D.$

Производной функции $U(x,y,z)$ в данном направлении $\bar{l}=\overline{M_0M_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\left|\overline{M_0M_1}\right|\to 0}\frac{U(M_1)-U(M_0)}{\left|\overline{M_0M_1}\right|},$$

где $U(M_1)=U(x_1,y_1,z_1)$, $U(M_0)=U(x_0,y_0,z_0)$.

Если $U(x,y,z)$ дифференцируемая в области D функция, то имеет место формула:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α,β,γ - углы, образованные вектором $\overline{M_0M_1}$ и координатными осями.

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в данном направлении.

Пример 10. Найти производную функции $u=xy+yz+zx$ в направлении вектора $\bar{a}=(3,4,12)$ в точке $A(2;1;3)$.

Для того , чтобы воспользоваться формулой, вычислим частные производные функции $U(x,y,z)$ и направляющие косинусы вектора $\bar{a}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x+z;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=y+x.$$

Вычислим значения производных в точке A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=1+3=4;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=2+3=5;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=1+2=3.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13.$$

Тогда

$$\cos\alpha=\frac{3}{13};\quad \cos\beta=\frac{4}{13};\quad \cos\gamma=\frac{12}{13}.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{a}}\right|_A = \frac{4\cdot 3}{13} + \frac{5\cdot 4}{13} + \frac{3\cdot 12}{13} = \frac{68}{13}.$$

9. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Вектор, координаты которого есть частные производные функции $u(x,y,z)$ называется **градиентом** функции $U(x,y,z)$ и обозначается ***grad u***:

$$\boldsymbol{grad\ u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Производная функции $u(x,y,z)$ в данном направлении l и $grad\ u$ связаны формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \Pi p_l\, \boldsymbol{grad\ u},$$

то есть производная в данном направлении равна проекции градиента на данное направление.

Пример 11. Найти градиент функции $z = x^3 + y^2$ в точке $A(1;2)$.

Решение.

Найдем частные производные функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Вычислим частные производные в точке A :

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 3; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = 4.$$

Тогда $\boldsymbol{grad\ z} = (3{,}4)$.

Пример 12. Найти градиент функции $u=x^3y^2z$ в точке $B(1;2;3)$.

Решение.

Найдем частные производные функции $u=x^3y^2z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2.$$

Вычислим частные производные в точке B:

$$\left.\frac{\partial z \backslash u}{\partial x}\right|_B = 36, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_B = 12, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_B = 4.$$

Градиент функции $u=x^3y^2z$ в точке B есть вектор $\boldsymbol{grad\ u} = (36{,}12{,}4)$.

Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Как определяются частные производные? Их геометрический и механический смысл.
3. Что называется полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ в данной точке?
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
5. Дайте определение производной по направлению и градиента функции. Укажите связь между ними.
6. Вычислить частные производные функции

$$a)\ z = sin\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right). \qquad б)\ z = (x-8)^y.$$

$$Ответ:\ a)\ \frac{\partial z}{\partial x} = cos\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right);\ \frac{\partial z}{\partial y} = cos\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right).$$

$$б)\ \frac{\partial z}{\partial x} = y(x-8)^{y-1};\ \frac{\partial z}{\partial y} = (x-8)^y\ ln(x-8).$$

7. Исследовать на экстремум функции:

   $а)\ z = x^3 + y^3 - 3xy;\quad Ответ:\ z_{min} = z(1{,}1) = -1;$

   $б)\ z = x^3 + y^2 - 3x + 2y.\ Ответ:\ z_{min} = z(1{,}-1) = -3.$

8. Найти градиент функции $z = arctg(x\cdot y)$ в точке $A(2{,}1)$ и производную данной функции в точке A в направлении вектора $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j}$.

$$Ответ:\ grad\ z = \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j};\quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

10.ПОНЯТИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция двух переменных $z = f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D плоскости Оху, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n\}$ - некоторое разбиение области D на элементарные подобласти $\Delta\sigma_к$, площадь которых обозначим также $\Delta\sigma_к$, а диаметры d_k.. В каждой подобласти зафиксируем точки $(x_k;y_k)$ $\quad к = 1,2,...,n.$

Выражение $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$ называется интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по области D.

Если существует предел последовательности интегральных сумм S_n при $max\ d_k \to 0$ (т.е. при $n \to \infty$) и этот предел не зависит от выбора точек $(x_k;y_k)$, то он называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Двойной интеграл обладает следующими свойствами:

1) Линейность:

$$\iint_D \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy$$

и

$$\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy;$$

2) аддитивность:

если $D=D_1+D_2$, то

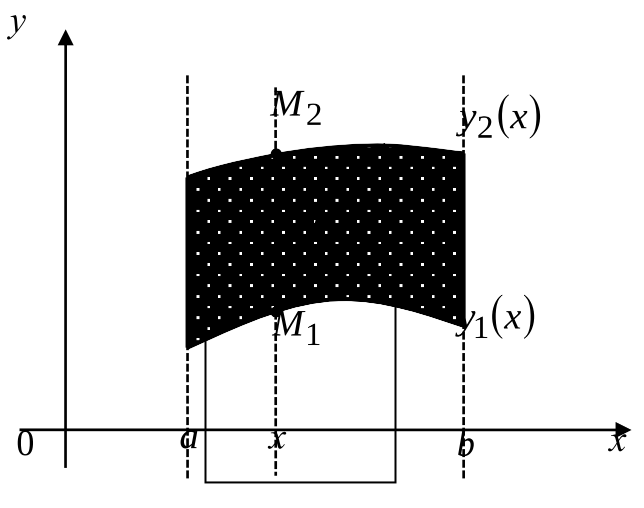
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

11.ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.

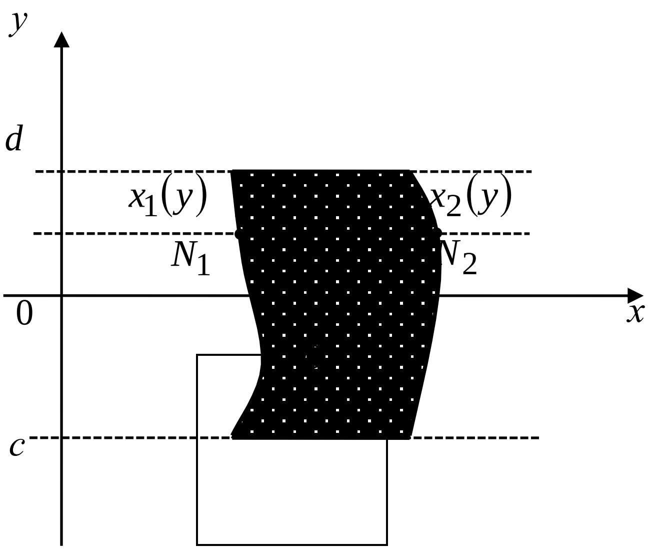
Предположим, что область интегрирования D представляет собой криволинейную трапецию:

$$a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x),$$

где $y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x)$ - однозначные непрерывные функции на отрезке $[a,b]$. Такую область будем называть стандартной относительно оси Oy (рис.1*а*). Отметим, вертикальная прямая проходящая через точку x оси Ox при $a<x<b$, пересекает границу области D только в двух точках M_1 и M_2.



а)



б)

Рис.1. Области, стандартная относительно оси *Oy (а) и оси Ox (б)*

Вычисление двойного интеграла $\iint f(x,y)dxdy$ сводится к вычислению

повторного интеграла по формуле:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

причем сначала вычисляем внутренний интеграл по переменной *y*, переменная *x* рассматривается как параметр, затем полученный результат интегрируется по *x*.

Аналогично, пусть область *D* задается следующим образом: $c \le y \le d$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, где $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ - однозначные непрерывные функции переменной *y* на отрезке [*c, d*]. Такую область будем называть стандартной относительно *Ox* (рис.1*б*). Необходимо заметить, что горизонтальная прямая, проходящая через точку *y* оси *Oy* при $c \lhd y \lhd d$ пересекает границу области только в двух точках N_1 и N_2.

Тогда двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ может быть вычислен с помощью

повторных интегралов следующим образом:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d de \int_{›1(—)}^{›2(—)} f(x,y)d›,$$

причем вычисляется внутренний интеграл по переменной *x*, затем полученный результат интегрируется по *y*.

Двойной интеграл, представляемый таким образом называется повторным интегралом.

Замечание 1. Если область D не является стандартной, то ее разбивают, если это возможно, на конечное число областей $D_1, D_2, ..., D_n$, стандартных относительно осей координат Ox или Oy, на основании свойств двойного интеграла имеют:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

Затем переходят к соответствующим повторным интегралам.

Пример 13. Вычислить $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy$, где область D -прямоугольник, ограниченный линиями: $2 \le x \le 3, \quad 1 \le y \le 3$.

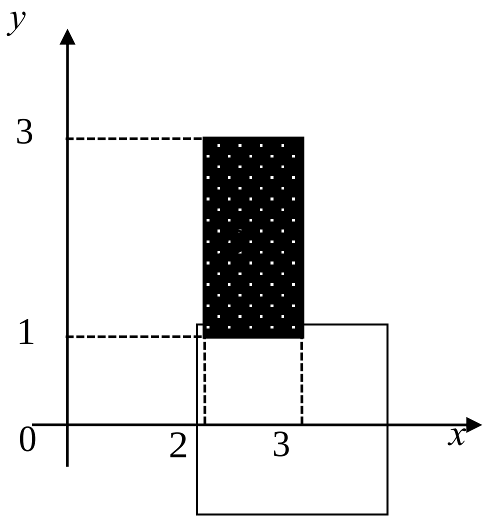


Рис. 2.

Решение.

Область интегрирования D является стандартной в направлении оси Oy и оси Ox, поэтому:

$$\iint\limits_D (x+y^2)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_1^3 (x+y^2)dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_2^3 (x+y^2)dx,$$

вычислим последний интеграл:

$$\int\limits_1^3 \left(\frac{x^2}{2} + y^2 x\right)\Bigg|_2^3 dy = \int\limits_1^3 \left(\frac{5}{2} + y^2\right)dy = \left(\frac{5y}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = 13\frac{2}{3}.$$

Пример 14. Вычислить $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, если область интегрирования D ограничена линиями: $y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 3.$

Решение.

Строим область интегрирования D

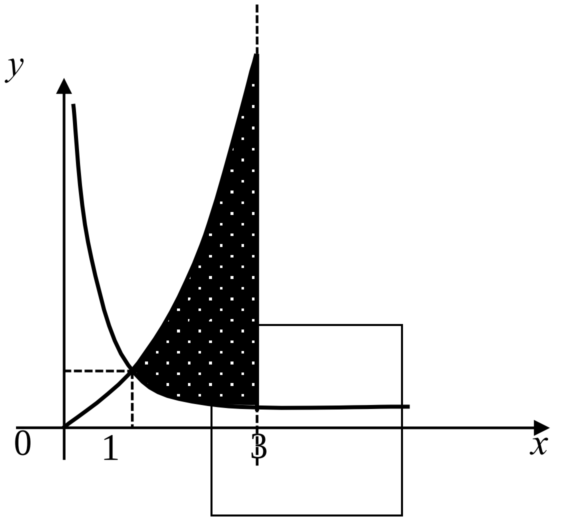


Рис. 3.

Данная область является стандартной относительно оси Oy. Переходим к повторному интегралу:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int\limits_1^3 x^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{y^2}dy = \int\limits_1^3 x^2\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{1/x}^{x^2}\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^3 x^2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int\limits_1^3 \left(x^3 - 1\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Bigg|_1^3 = 18.$$

Пример 15. Изменить порядок интегрирования в интеграле: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x} f(x,y)dy$.

Решение.

Вычертим область D по пределам интегрирования.

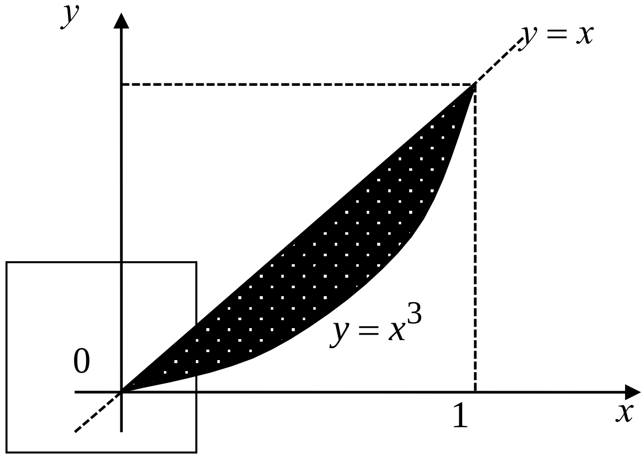


Рис. 4.

Данная область является стандартной как по оси *Oy*, так и по оси *Ox*. Для изменения порядка интегрирования отметим, что уравнение кривой, ограничивающей область слева имеет вид $x=y$, справа - $x=\sqrt[3]{y}$.

Изменяем порядок интегрирования

$$\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$$

12 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

В некоторых задачах вычисление двойного интеграла значительно упрощается, если перейти к полярным координатам по формулам:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r d\varphi dr.$$

Пусть область интегрирования *D* определяется неравенствами

$$\alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),$$

где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ однозначные непрерывные функции на отрезке [α,β].

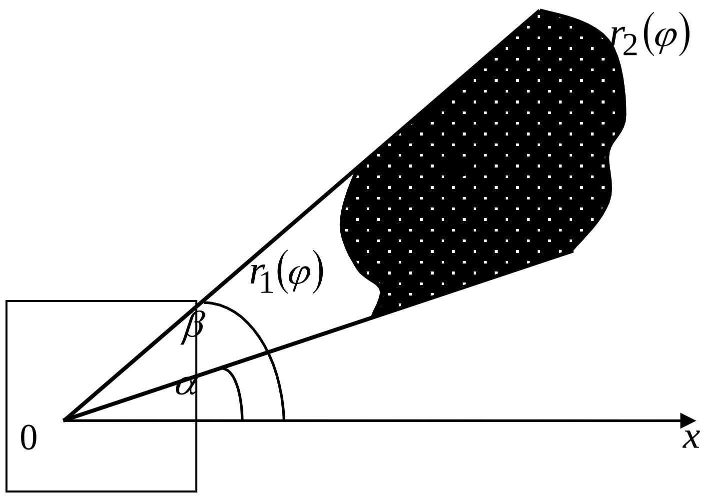


Рис. 5.

По аналогии с прямоугольными координатами имеем:

$$\iint_D F(r,\varphi)drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1}^{r_2} F(r,\varphi)dr, \text{ где } F(r,\varphi) = rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Пример 16. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 - 2y + x^2 = 0; \quad y^2 - 4y + x^2 = 0; \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}; \quad y = x\sqrt{3}.$$

Решение.

Преобразуя первое и второе уравнение, получим:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, x^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Это окружности с центрами в точках (0,1) и (0,2) и радиусами, равными 1 и 2, соответственно.

Перейдем к полярным координатам по формулам:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Уравнение $x^2 + (y-1)^2 = 1$ в полярных координатах запишется в виде:

$$r = 2\sin\varphi.$$

Уравнение $x^2 + (y-2)^2 = 4$ в полярных координатах запишется в виде:

$$r = 4\sin\varphi.$$

Из уравнения прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ получим $r\sin\varphi = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}}$, $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Уравнение прямой $y = x\sqrt{3}$ даст нам $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, область интегрирования $D: \left\{2\sin\varphi \le r \le 4\sin\varphi, \quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}$.

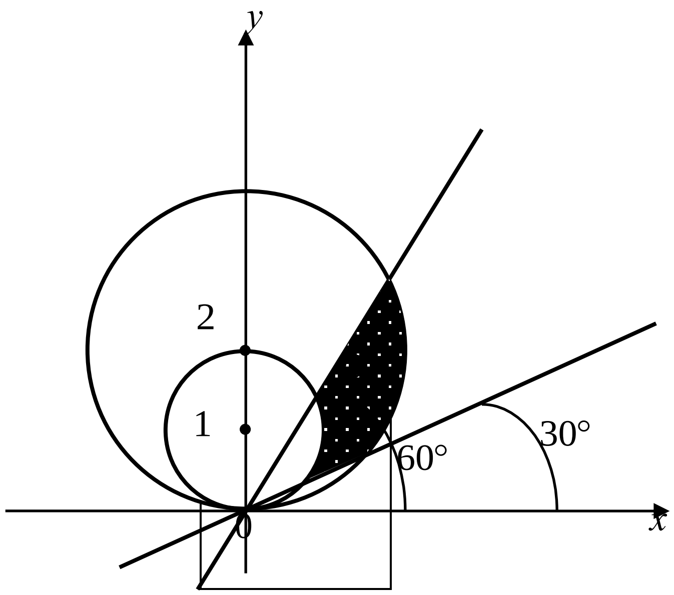


Рис. 6.

Находим площадь:

$$S=\iint\limits_D rdrd\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}rdr=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{r^2}{2}\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}d\varphi=6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi d\varphi=3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos2\varphi)d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

13. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Тройной интеграл можно определить по аналогии с двойным интегралом. Пусть в пространстве *Oxyz* задана конечная замкнутая область *V*; *f(x,y,z)* - ограниченная функция, определенная в V. Разобьем область V на конечное число ячеек ΔV_1, ΔV_2,..., ΔV_n, в каждой из них выберем точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ (i=1,2,...,n). Сумма $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V$, где ΔV_i - объем i-той ячейки, называется трехмерной интегральной суммой.

Обозначим d - наибольший из диаметров ячеек ΔV_i. Предел интегральной суммы ΔV_i при $d\to 0$, если этот предел существует и не зависит от формы ΔV_i, а также от выбора точек M_i в V_i, называется тройным интегралом от функции *f(x,y,z)* в области *V* и обозначается:

$$\iiint\limits_v f(x,y,z)dv=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i.$$

Если функция *f(x,y,z)* непрерывна в замкнутой ограниченной области интегрирования *V* с кусочно-гладкой границей, то тройной интеграл существует.

Физический смысл тройного интеграла состоит в следующем: если *f(x,y,z)* есть непрерывная плотность распределения массы в пространстве, то тройной интеграл $m=\iiint\limits_v f(x,y,z)dv$ представляет собой массу, заполняющую область интегрирования *V*. Если *f(x,y,z)*=1, то масса области *V* численно равна ее объему:

$$V=\iiint\limits_v dv.$$

В прямоугольных декартовых координатах *dv=dxdydz* и тройной интеграл записывается в виде:

$$\iiint\limits_v f(x,y,z)dxdydz,$$

в частности для объема тела получаем формулу

$$V=\iiint\limits_v dxdydz.$$

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

14.ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть область интегрирования *V* стандартна относительно оси *Oz*, т.е. ограниченна снизу и сверху соответственно однозначными непрерывными поверхностями:

$$z_1=z_1(x,y),\ \ z_2=z_2(x,y),$$

причем проекция области V на координатную плоскость *Oxy* есть плоская область *D*.

Тогда будем иметь:

$$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Если проекция *D* стандартна относительно оси *Oy* и определяется неравенствами $a\le x\le b,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x),\, где\, y_1(x)\, и\, y_2(x)$ — однозначные непрерывные функции на отрезке *[a,b]*, то

$$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{b}^{a} dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Если область интегрирования *V* стандартна относительно всех трех координатных осей *Ox,Oy,Oz,* то пределы интегрирования для тройного интеграла можно расставить 6-ю различными способами.

Пример 17. Вычислить $\iiint\limits_{v} xyzdxdydz$, где область *V* определена неравенствами $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy$.

Решение.

Имеем:

$$\iiint\limits_{v} xyzdxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} xyzdz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x xy\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{xy} dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x x^3y^3dy=$$

$$\frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^3y^4\Bigg|_0^x dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^7dx=\frac{1}{64}x^8\Bigg|_0^1=\frac{1}{64}.$$

15. ЗАДАЧА ПРИВОДЯЩАЯ К КРИВОЛИНЕЙНОМУ ИНТЕГРАЛУ ВТОРОГО РОДА.

Пусть в каждой точке области *V* задано непрерывное поле $\bar{a}=(P,Q,R),\, где\, P=P(x,y,z),\ Q=Q(x,y,z),\quad R=R(x,y,z)$ - непрерывные в области *V* функции.

При перемещении материальной точки вдоль отрезка гладкой кривой *l* поле $\bar{a}$ совершает некоторую работу *A*. Чтобы найти эту работу, разобьем кривую на n частей l_i, *i=1,2, ...,n*. В каждый части l_i выберем произвольную точку

$M_i=(x_i,y_i,z_i)$. Пусть $\vec{\tau}_i$ - единичный вектор касательной к кривой l в точке M_i. Тогда элементарная работа ΔA_i поля $\bar{a}$ на участке l_i приближенно равна $\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n}(\bar{a}(M_i)_1 \cdot \bar{\tau}_i)\Delta l_i$. Работа поля $\bar{a}$ по всей кривой l будет равна сумме элементарных работ ΔA_I

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}(\bar{a}(M_i)\ \ \bar{\tau}_i\ )\Delta l_i$$

Если $\Delta = max\Delta\ l_i \to 0$, то в пределе получим всю работу силового поля $\bar{a}$ вдоль дуги l:

$$A = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\bar{a}(M_i)_1\bar{\tau}_i)\Delta l_i.$$

Этот предел обозначим $\int_l (\bar{a},\bar{\tau})dl$ и будем называть криволинейным интегралом второго рода от вектор функции $\bar{a} = (P,Q,R)$ по кривой l.

Интеграл $\int(\bar{a},\bar{\tau})dl$ можно записать в координатной форме

$$\int_l (\bar{a},\bar{\tau})dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz.$$

16. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА

Пусть кривая l задана в области параметрически уравнениями:

$$l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ t \in [\alpha,\beta], \end{cases}$$

$$\bar{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

В точках кривой l вектор-функция $\bar{a}$ имеет вид

$$\bar{a} = (P(x(t),y(t),z(t)), Q(x(t),y(t),z(t)), R(x(t),y(t),z(t))),$$

Тогда криволинейный интеграл $\int_e Pdx + Qdy + Rdz$ можно свести к определенному по формуле

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Если плоская кривая l задана явно уравнением $y = f(x),\quad x \in [a,b],$ $f(x)$ гладкая функция, то вычисление интеграла $\int\limits_{l} Pdx + Qdy$ можно производить по формуле:

$$\int\limits_{l} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x) f'(x) dx.$$

Пример 16. Вычислить работу силы $\bar{a} = -x\bar{i} + y\bar{j} = (-x, y)$ при перемещении материальной точки вдоль дуги параболы $y = 2x^2$ от точки $A(0,0)$ до $B(2,8)$.

Решение.

$$\int\limits_{l} -xdx + ydy = \int\limits_{0}^{2} (-x + 2x^2 \cdot (2x^2)')dx = \int\limits_{0}^{2} (-x + 8x^3)dx = 30.$$

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как вычисляется двойной интеграл?
2. Написать уравнения кривых, ограничивающих область интегрирования для следующих двойных интегралов.

   а) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy.$ *Ответ:* $x = 1, x = 3, y = x^2, y = x + 9.$

   б) $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx.$ *Ответ:* $x = \dfrac{y^2}{4} - 1, x = 2 - y.$

3. Построить области и изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

   а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{3x^2}^{3x} f(x)dy.$ *Ответ:* $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx.$

   б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$ *Ответ:* $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy.$

4. Вычислить двойной интеграл по указанной области:

   а) $\iint\limits_{D} (5y - 2x)dxdy;$ D: $y = \dfrac{x^2}{2};\ y = x$ *Ответ:* $\dfrac{4}{3}.$

   б) $\iint\limits_{D} 6xydxdy;$ D: $y = x + 2;\ x = 0;\ y = 0.$ *Ответ:* $-4.$

5. Найти объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

а) $\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 - 2, \\ z = -\sqrt{x^2 + y^2}. \end{array}$ *б)* $\begin{array}{l} z = 4, \\ z = -x^2 . + y^2. \end{array}$

Ответ: а) $5\pi/6$; *б)* 8π.

6. Вычислить криволинейные интегралы по заданной кривой l от первой указанной точки до второй:

а) $\int\limits_l xydx + (x-y)dy;$ $l: y = x^2, A(0,0), B(1,1).$

б) $\int\limits_l dx - xdy + (z^2+1)dz;$ $l: x = cos\,t, y = sin\,t, z = t, t_1 = 0, t_2 = \pi/2.$

Ответ: а) 5/12; *б)* $\pi^3/24+\pi/4-1$.

Контрольная работа №5

В примерах 1-10 найти полный дифференциал функции.

1. $z = e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + arcsin(x+2y) + 5.$
2. $z = sin(x^3 + y^2) - tg(x \cdot \sqrt{y}) - \frac{x^2+1}{y}.$
3. $z = 5^{-(x-2y)} + cos2x - arctg(y^2+6).$
4. $z = 3x \cdot ln(x + \frac{y}{3}) - ctg(x \cdot y^2) + 4.$
5. $z = arccos(2x+y) - \frac{x^2}{1-y} + ye^{1-x}.$
6. $z = ln(1+x^2) + y^{3x} + sin2y + \sqrt{8}.$
7. $z = log_2(y^2 - x) + \frac{x+y}{x-y} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}}.$
8. $z = ln\sqrt{x^2+y^2} - tg3x - arccos(x \cdot y).$
9. $z = sin\,x^4 + ln\,y^2 + x^{2y}.$
10. $z = arctg\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}e^{1-x} + \frac{1}{x^2+y^3}.$

В примерах 11-15 убедиться, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

11. $z = arctg(y/x).$
12. $z = cos^2(x-y).$

13. $z = x^y$.
14. $z = ln(x^3 + y^2)$.
15. $z = sin(x \cdot y^2)$.

В примерах 16-20 составить лапласиан $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для следующих функций:

16. $z = cos^2(x \cdot y)$.
17. $z = ln(y - x)$.
18. $z = cos\frac{x}{y}$.
19. $z = \frac{2}{y - x}$.
20. $z = ln\,cos(xy)$.

В примерах 21-30 исследовать на экстремум функцию.

21. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
23. $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 1$.
24. $z = (x - 7)^2 + (y + 8)^2$.
25. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
26. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.
27. $z = 5 - x^3 - y^3 + 3xy$.
28. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.
29. $z = 3x^2 + 3y^2 + 6y - 6x$.
30. $z = e^{4x}(x + y^2 + 2y)$.

В примерах 31-40 дана функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти $grad\ z$ в точке A и производную функции $f(x, y)$ в этой точке в направлении вектора $\vec{a}$:

31. $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 2; \quad A(1,2); \quad \vec{a} = (3,4)$.
32. $z = ln\sqrt{x^2 + y^2} + 7; \quad A(1,1); \quad \vec{a} = (1,1)$.
33. $z = 3x^2 - 2xy^3; \quad A(2,-2); \quad \vec{a} = (-3,-4)$.
34. $z = arctg(xy); \quad A(1,2); \quad \vec{a} = (\sqrt{3},1)$.
35. $z = ln\frac{y}{x}; \quad A(2,1); \quad \vec{a} = (-1,\sqrt{3})$.

36. $z=\frac{1}{3}x^3y+2x+y+4;\quad A(1,-1);\quad \vec{a}=(6,-8).$

37. $z=xy+y+2x;\quad A(2,3);\quad \vec{a}=(-12,5).$

38. $z=\sqrt{x}\cdot y+x+3;\quad A(4,1);\quad \vec{a}=(-\sqrt{3},1).$

39. $z=(x^2+y^2+1)^{-1};\quad A(1,-1);\quad \vec{a}=(3,-4).$

40. $z=arctg\frac{x}{y};\quad A(1,2);\quad \vec{a}=(3,4).$

В примерах 41-46 вычислить двойной интеграл по указанной области *D*. Область интегрирования изобразить на чертеже.

41. $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$; *D: y=0; x=1; x=2; y=ln x.*

42. $\iint\limits_D xydxdy$; *D:* $y=1-x^2$; $y=-x-1$

43. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$; *D:* $y=x^2+4x$; $y=x+4$.

44. $\iint\limits_D sin(x+y)dxdy$; *D:* $y=0$; $y=x$; $y=\frac{\pi}{2}-x$.

45. $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy$; *D:* $y=4-x^2$; $y=0$.

46. $\iint\limits_D y(1+x^2)dxdy$; *D:* $y=x^3$; $y=3x$.

В примерах 47-50 изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Область интегрирования изобразить на чертеже.

47. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

48. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2x} f(x,y)dy.$

49. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{x+3} f(x,y)dy.$

50. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{x}^{3x+1} f(x,y)dy.$

В примерах 51-60 найти объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать рисунок.

51. $z=16-x^2-y^2$; $z=0$.

52. $x^2+y^2=16$; $z=y^2$; $z=0$.

53. $z=2-x^2-y^2$; $x^2+y^2=1$; $z=0$.

54. $z=x^2+y^2$; $z=2$.

55. $x^2+y^2=4;\ y+z=1;\ z=0.$
56. $x^2+y^2=2;\ z=0;\ z=2-x-y.$
57. $z=0;\ x^2+y^2=1;\ x^2+y^2+z^2=4.$
58. $z=\sqrt{x^2+y^2};\ z=2-x^2-y^2.$
59. $z=1-y^2;\ z=0;\ x^2+y^2=1.$
60. $z=16-y^2;\ z=0;\ x^2+y^2=16.$

СОДЕРЖАНИЕ