ВЫСШИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по дисциплине

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Часть III

для студентов уровня ВО заочной формы обучения

специальности 145. 01. 03 «Сети телекоммуникаций»

МИНСК 2002

Составители: Гладков Л.Л.

Гладкова Г.А.

Приведены методические указания по самостоятельному изучению дисциплины «Высшая математика», а также задания на выполнение контрольной работы.

Предназначены для студентов уровня ВО заочной формы обучения специальности 145. 01. 03 «Сети телекоммуникаций».

Рецензент: Рябенкова Л.А.

Издание утверждено на заседании кафедры М и Ф

12.04.2002г., протокол №10

Зав. кафедрой Гладков Л.Л.

ВВЕДЕНИЕ

В шестом семестре студенты ВГКС по высшей математике выполняют контрольные работы №3 и №4.

Для того, чтобы успешно их выполнить, необходимо изучить сначала теоретический материал по одному из учебников, указанных в списке литературы, и конспекту обзорных лекций. При этом следует ориентироваться на рабочую программу, приведенную ниже. Затем внимательно разберите решения примеров из данной методической разработки и выполните задания для самопроверки.

При оформлении контрольной работы для замечаний преподавателя оставляются поля. Перед решением задачи полностью записывается ее условие. Решение следует сопровождать короткими пояснениями с указанием использованных формул и теорем. Чертежи должны быть выполнены аккуратно. В конце работы ставится дата ее завершения, приводится список проработанной литературы. Работа подписывается.

Выбор варианта контрольной работы определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки. Получив проверенную работу, студент обязан выполнить указания, сделанные рецензентом. Если работа не зачтена, следует сделать работу над ошибками в той же тетради и представить работу на повторную рецензию.

К сдаче экзамена или зачета допускаются студенты, имеющие на руках зачтенные контрольные работы.

Таблица 1

Варианты контрольных заданий

№ варианта	№№ задач						
1	1	11	21	31	41	51	61
2	2	12	22	32	42	52	62
3	3	13	23	33	43	53	63
4	4	14	24	34	44	54	64
5	5	15	25	35	45	55	65
6	6	16	26	36	46	56	66
7	7	17	27	37	47	57	67
8	8	18	28	38	48	58	68
9	9	19	29	39	49	59	69
10	10	20	30	40	50	60	70
11	1	12	23	34	45	56	67
12	2	13	24	35	46	57	68
13	3	14	25	36	47	58	69
14	4	15	26	37	48	59	70
15	5	16	27	38	49	60	61
16	6	17	28	39	50	51	62
17	7	18	29	40	41	52	63
18	8	19	30	31	42	53	64
19	9	20	21	32	43	54	65
20	10	11	22	33	44	55	66
21	10	19	28	37	46	55	64
22	9	18	27	36	45	54	63
23	8	17	26	35	44	53	62
24	7	16	25	34	43	52	61
25	6	15	24	33	42	51	70
26	5	14	23	32	41	60	69
27	4	13	22	31	50	59	68
28	3	12	21	40	49	58	67
29	2	11	30	39	48	57	66
30	1	20	29	38	47	56	65

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дифференциальные уравнения.

1. Основные определения: порядок уравнения, общее и частное решения, задача Коши.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков. Способы понижения порядка дифференциальных уравнений.
6. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Фундаментальная система решений и общее решение.
7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
8. Структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения.
9. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Метод неопределенных коэффициентов (метод подбора).
10. Системы линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. т.2.- М.: Наука, 1976 (и последующие издания).

2. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория Паскаля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: «Наука», 1979.

3. Колобов А.М. Избранные главы высшей математики. Мн.: Высшая школа. 1965.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1989.

5. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1967.

6. Руководство к решению задач по высшей математике. /Под ред. Гурского Е.И. Часть I. - Мн.: Вышэйшая школа, 1989.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются **дифференциальными уравнениями**.

Если неизвестная функция является функцией **одной** переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если уравнение содержит неизвестную функцию двух или большего числа независимых переменных, то оно называется **уравнением в частных производных**.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной неизвестной функции, входящей в уравнение. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x,y,y')=0, \qquad (1)$$

порядка n -

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0. \qquad (2)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется функция $y=y(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Множество всех частных решений называется **общим решением** дифференциального уравнения. Процесс нахождения решения называется **интегрированием дифференциального уравнения**.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка записывается в виде $y=\varphi(x,C)$, где C - произвольная постоянная, или $\Phi(x,y,C)=0$, определяющему y как неявно заданную функцию от x и называемому общим интегралом дифференциального уравнения. Придавая C различные значения, получают частные решения дифференциального уравнения. На практике частное решение выделяют из общего, задавая дополнительное условие, которому должна удовлетворять искомая функция. Чаще всего такое условие включают в задачу, называемую **задачей Коши**: найти решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения $F(x,y,y')=0$, которое при заданном значении x_0 принимает заданное значение y_0. Это условие $y=y_0$ при $x= x_0$ называется **начальным**. Оно часто записывается в виде $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Общее решение дифференциального уравнения порядка выше первого зависит от стольких произвольных постоянных, каков порядок уравнения, т.е. общее решение дифференциального уравнения n-порядка $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ зависит от n произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$, а задача Коши имеет вид

$$\begin{gathered} F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \\ y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_0', \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

1. **Уравнения с разделенными переменными** имеют вид

$$f_2(y)dy=f_1(x)dx, \tag{4}$$

или

$$f_2(y)dy+f_1(x)dx=0 \tag{5}$$

Считая функцию y известной функцией от x, равенство (4) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов. Тогда неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым. Проинтегрировав левую часть по y, а правую по x, получим общий интеграл уравнения (4).

$$\int f_2(y)dy=\int f_1(x)dx+C.$$

Уравнение (5) также интегрируется непосредственно

$$\int f_2(y)dy+\int f_1(x)dx=C.$$

Частным случаем уравнения (4) является уравнение $y'=f(x)$, не содержащее неизвестной функции $y=y(x)$ или, $dy=f(x)dx$, общее решение которого $y=\int f(x)dx+C.$

2. Если дифференциальное уравнение можно привести к виду (4), то оно называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'=e^{x+y}$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^y$, $\frac{dy}{e^y}=e^x dx$, $e^{-y}dy=e^x dy$, $C+\int e^{-y}dy=\int e^x dx$, $C-e^{-y}=e^x$, $e^x+e^{-y}=C$ - общий интеграл дифференциального уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'=\frac{y}{x}$.

Решение. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. Разделяем переменные, умножив обе части уравнения на dx и разделив на y: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Интегрируем: $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+C_1$, $ln|y|=ln|x|+C_1$. Чтобы получить решение в более простой форме, C_1 заменим на $ln/C/$, $C\neq0$, так как любое число C_1 может быть представлено в виде натурального логарифма другого положительного числа $/C/$. Тогда $ln|y|=ln|x|+ln|C|$. $ln|y|=ln|C\cdot x|$, откуда $y=Cx$.

Замечание. Разделив обе части на y, мы могли потерять решение $y=0$. Действительно, $y=0$ - решение исходного уравнения, так как подставив в него $y=0$, получим тождество $0=0$. Это частное решение можно получить из общего при $C=0$. Таким образом, общее решение имеет вид $y=Cx$,где C - любое действительное число (в том числе и 0).

3. Уравнение $y'=f(x,y)$ называется **однородным**, если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию

$$f(kx,ky)=f(x,y). \tag{6}$$

Функцию, удовлетворяющую этому условию, можно представить в виде

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

Путем введения новой неизвестной функции $u=\dfrac{y}{x}$ однородное уравнение $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно,

$$y=ux,\ y'=u'x+u. \tag{8}$$

Подставив выражения для y и y' в уравнение (7), получим

$$\frac{du}{dx}\cdot x+u=\varphi(u),$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\varphi(u)-u,$$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

После того как уравнение будет проинтегрировано, следует u заменить на $\dfrac{y}{x}$.

<u>Пример 3</u>. Найти общее решение уравнения $y'=\dfrac{3y-7x}{4y-3x}$.

Решение. В том, что это однородное уравнение легко убедиться, заменив x на kx, а y на ky.

$$f(kx,ky)=\frac{3ky-7kx}{4ky-3kx}=\frac{k(3y-7x)}{k(4y-3x)}=f(x,y).$$

Используя формулы (8), приведем уравнение к виду

$$u'x+u=\frac{3ux-7x}{4ux-3x},\quad x\frac{du}{dx}=\frac{3u-7}{4u-3}-u,$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{3u-7-4u^2+3u}{4u-3},\quad x\frac{du}{dx}=-\frac{4u^2-6u+7}{4u-3}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{4u-3}{4u^2-6u+7}du=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int\frac{4u-3}{4u^2-6u+7}du=\left|\begin{array}{l} z=4u^2-6u+7 \\ dz=(8u-6)du \\ \dfrac{dz}{2}=(4u-3)du \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}ln|z|=\frac{1}{2}ln(4u^2-6u+7),$$

$$\frac{1}{2}ln(4u^2-6u+7)=-ln|x|+\frac{1}{2}ln|C|,$$

$$ln(4u^2-6u+7)+ln\,x^2=ln|C|,$$

$$ln(x^2(4u^2-6u+7))=ln|C|,$$

$$x^2(4u^2-6u+7)=C.$$

Заменив *u* на *y/x*, получим общий интеграл уравнения в виде

$$4y^2-6xy+7x^2=C.$$

4. Линейным называется дифференциальное уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной. Его стандартный вид

$$y'+p(x)y=Q(x). \qquad (9)$$

Функции *p(x)* и *Q(x)* предполагаются непрерывными в той области, в которой ищется решение уравнения (9).

Один из способов решения линейных уравнений первого порядка состоит в следующем. Искомую функцию представляют в виде произведения двух неизвестных функций, одну из которых подбирают так, чтобы уравнение упростилось. Пусть $y=uv$. Тогда $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$ и уравнение примет вид

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+p(x)v\right)=Q(x). \qquad (10)$$

Функцию v подбирают так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль, т.е.

$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$$

и ищут частное решение *v=v(x)* этого уравнения с разделяющимися переменными, приняв постоянную интегрирования равной нулю.

Подставим найденное решение в уравнение (10). Так как выражение в скобках равно нулю, то оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$v(x)\frac{du}{dx}=Q(x).$$

Найдя его общее решение в виде *u=u(x,C)*, получим общее решение уравнения (9)

$$y=u(x,C)\cdot v(x).$$

<u>Пример 4.</u> Найти общее решение уравнения $y'+y\cdot tgx=\frac{1}{cos\,x}$,

Решение.

$$y=u\cdot v,\ y'=u'v+v'u,$$

$$u'v+v'u+u\cdot v\cdot tgx=\frac{1}{cos\,x},$$

$$u'v+u(v'+v\cdot tgx)=\frac{1}{cos\,x}.$$

Выражение в скобках приравниваем к нулю. Тогда линейное уравнение распадается на два уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + v \cdot tgx = 0, \\ v\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v.

$$\frac{dv}{dx} + v \cdot tgx = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v \cdot tgx, \quad \frac{dv}{v} = \frac{-\sin x}{\cos x}dx,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln|v| = \ln|\cos x| \text{ (выбираем } C\text{=0)},$$

$$v = \cos x \text{ .}$$

Тогда второе уравнение примет вид

$$\cos x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x}, \quad du = \frac{1}{\cos^2 x}dx,$$

$$\int du = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + C, \quad u = tgx + C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = u \cdot v = \cos x(tgx + C) = \sin x + C \cdot \cos x.$$

<u>Пример 5.</u> Найти закон установления тока при замыкании цепи с сопротивлением r, индуктивностью L и э.д.с. источника ε.

Решение. По второму правилу Кирхгофа

$$ri = \varepsilon - L\frac{di}{dt} \text{ или } L\frac{di}{dt} + ri = \varepsilon, \quad \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Данное уравнение является линейным относительно искомой функции $i(t)$, характеризующей силу тока в цепи в момент времени t. Требуется найти частное решение, удовлетворяющему условию: при $t=0$ $i=0$.

Полагаем $i = u(t) \cdot v(t)$. Тогда

$$u'v + v'u + \frac{r}{L}uv = \frac{\varepsilon}{L},$$

$$u\left(\frac{dv}{dt} + \frac{r}{L}v\right) + v\frac{du}{dt} = \frac{\varepsilon}{L},$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{r}{L}v.$ Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{r}{L}dt, \ \ln|v| = -\frac{r}{L}t, \quad v = e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Подставив выражение для v в уравнение $vu' = \dfrac{\varepsilon}{L}$, определим u

$$e^{-\frac{r}{L}t}\frac{du}{dt}=\frac{\varepsilon}{L},\quad du=\frac{\varepsilon}{L}\cdot e^{\frac{r}{L}t}dt,$$

$$u=\frac{\varepsilon}{r}e^{\frac{r}{L}t}+C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$i=u\cdot v=e^{-\frac{r}{L}t}\left(\frac{\varepsilon}{r}e^{\frac{r}{L}t}+C\right)=\frac{\varepsilon}{r}+Ce^{-\frac{r}{L}t}.$$

Подставив в него начальное условие ($i=0;\ t=0$), найдем C:

$$0=\frac{\varepsilon}{r}+C,\quad C=-\frac{\varepsilon}{r}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$i=\frac{\varepsilon}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Анализ полученного решения показывает, что

1) с ростом t вследствие быстрого убывания $e^{-\frac{r}{L}t}$ вторым слагаемым можно пренебречь и сила тока будет подчиняться закону Ома;

2) при увеличении индуктивности L процесс установления тока замедляется, что объясняется законом Ленца: экстратоки самоиндукции препятствуют изменениям тока, их вызвавшим.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Простейшие случаи понижения порядка

1. **Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$** (случай непосредственного интегрирования).

В соответствии с определением производной n-ого порядка

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$$

преобразуем исходное уравнение и проинтегрируем

$$dy^{n-1}=f(x)dx,\qquad y^{n-1}=\int f(x)dx+C_1,$$

в результате чего порядок уравнения понизился.

Общее решение получается последовательным интегрированием

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \cdot dx \ldots dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

2. **Уравнение вида** $\boldsymbol{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0}$ (не содержит искомой функции и её производных до порядка k*-1* включительно).

Порядок уравнения может быть понижен на k единиц заменой

$$y^{(k)} = p(x).$$

Так как $y^{(k+1)} = p'(x), \ldots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$, уравнение примет вид

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Из последнего уравнения находим $p = p(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, а y находим из уравнения $y^{(k)} = p(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ интегрированием k раз.

3. **Уравнение вида** $\boldsymbol{F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0}$ (не содержит независимой переменной).

Понижение порядка уравнения на единицу достигается заменой $y' = p(y)$, причем следует обратить внимание на то, что p рассматривается как новая неизвестная функция аргумента y (а не x, как в предыдущем случае). Поэтому все производные функции y по аргументу x надо выразить через производные новой функции $p(y)$ по аргументу y, учитывая что p является сложной функцией от x:

$$y' = p(y(x)),$$

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

$$y''' = \left(\frac{dp}{dy} \cdot p \right)'_x = \left(\frac{dp}{dy} \cdot p \right)'_y \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} p + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dp}{dy} \right) \cdot p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \cdot p, \ldots$$

4. Порядок уравнения понижается на единицу в случаях, когда уравнение можно привести к виду

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0.$$

Откуда следует

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1 .$$

Замечание. Для рассмотренных выше уравнений вида 2-4 при решении задачи Коши в ряде случаев нецелесообразно находить общее решение уравнения. Решение упрощается, если начальные условия используются в процессе решения.

<u>Пример 6.</u> Решить уравнение $y''(e^x + 1) - e^x y' = 0.$

Решение. В этом уравнении отсутствует искомая функция y . Поэтому, вводим замену $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$.

$$p'(e^x+1)-e^x p=0,$$

$$p'(e^x+1)=e^x p,$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{e^x dx}{e^x+1}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln|p|=\ln|C_1|+\ln(e^x+1),$$

$$\ln|p|=\ln\left|C_1(e^x+1)\right|,$$

$$p=C_1(e^x+1).$$

Возвращаясь к исходной функции y , имеем

$$\frac{dy}{dx}=C_1(e^x+1);$$

$$y=C_1\int(e^x+1)dx.$$

$$y=C_1(e^x+x)+C_2.$$

Пример 7. Найти частное решение уравнения $y''=e^{2y}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

Решение. Это уравнение не содержит явным образом аргумента *x*. Поэтому используем замену $y'=p(y),\quad y''=p\dfrac{dp}{dy}.$

$$p\frac{dp}{dy}=e^{2y}\quad \text{или}\quad pdp=e^{2y}dy.$$

Интегрируя получим

$$\frac{p^2}{2}=\frac{e^{2y}}{2}+\frac{C_1}{2}\quad \text{или}\quad (y')^2=e^{2y}+C_1.$$

Тогда

$$y'=\pm\sqrt{e^{2y}+C_1}.$$

Так как $y'(0)=1,$ то $y'=\sqrt{e^{2y}+C_1}.$

Используя начальные условия, найдем C_1.

$$1=\sqrt{e^0+C_1}\quad \text{или}\quad C_1=0.$$

Получим уравнение

$$y'=e^y\quad \text{или}\quad e^{-y}dy=dx,$$

интегрируя которое, находим

$$-e^{-y}=x+C_2.$$

Из условия $y(0)=0$ определим значение C_2.

$$-1=0+C_2,\ C_2=-1.$$

Тогда

$$-e^{-y} = x - 1,$$

$$e^{-y} = 1 - x.$$

Прологарифмировав последнее равенство, выразим *y*.

$$-y = ln|1 - x|.$$

$$y = ln\left|\frac{1}{1 - x}\right|.$$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

I. Линейное **однородное** дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (11)$$

где p и q -действительные числа.

Чтобы решить данное уравнение, надо составить и решить характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (12)$$

Если корни характеристического уравнения действительны и различны, $(k_1 \neq k_2)$, то общее решение уравнения (11) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (13)$$

Если же корни действительны и одинаковы $(k_1 = k_2 = k)$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \qquad (14)$$

Наконец, в случае комплексных корней $(k_{1,2} = \alpha \pm i\beta)$, общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \qquad (15)$$

<u>Пример 8.</u> Решить уравнение

$$y'' - 8y' + 12y = 0.$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$k^2 - 8k + 12 = 0, \qquad k_1 = 2, \quad k_2 = 6.$

Так как корни квадратного уравнения являются действительными и разными, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}.$$

<u>Пример 9.</u> Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

удовлетворяющее заданным условиям $y(2)=1,\quad y'(2)=-2.$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет корни $k_1=k_2=1$. Поэтому общее решение имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2xe^x \quad \textit{или} \quad y=e^x(C_1+C_2x).$$

Для нахождения частного решения продифференцируем *y*.

$$y'=(e^x(C_1+C_2x))'=e^x(C_1+C_2x)+e^x\cdot C_2=e^x(C_1+C_2+C_2x).$$

Подставив выражения для y и y' в начальные условия, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2.

$$\begin{cases} e^2(C_1+2C_2)=1, \\ e^2(C_1+3C_2)=-2. \end{cases}$$

Решив ее, найдем
$$\begin{cases} C_1=7e^{-2}, \\ C_2=-3e^{-2}. \end{cases}$$

$$y_{\div астн.}=(7-3x)e^{x-2}.$$

<u>Пример 10.</u> Напряжение в электрической цепи во время переходного процесса описывается уравнением

$$U''+\frac{r}{L}U'+\frac{1}{LC}U=0,$$

где r, L, C - постоянные величины, характеризующие сопротивление, индуктивность и емкость цепи. Найти функцию U(t), если $r^2 \lhd \frac{4L}{C}$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2+\frac{r}{L}k+\frac{1}{LC}=0$$

имеет комплексные корни $k_1=-\frac{r}{2L}+\omega_0 i,\ k_2=-\frac{r}{2L}-\omega_0 i\ \left(D=\frac{r^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}\lhd 0\right)$, где $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{4L^2}}$. В общем случае решение имеет вид

$$U(t)=e^{-\frac{r}{2L}t}(C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t).$$

Преобразуем его, приняв $C_1=A\sin\varphi_0$ и $C_2=A\cos\varphi_0$. Тогда

$$C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t=A(\sin\varphi_0\cos\omega_0 t+\cos\varphi_0\sin\omega_0 t)==A\sin(\omega_0 t+\varphi).$$

Отсюда

$$U(t) = Ae^{-\frac{r}{2L}t} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Последняя формула описывает затухающие синусоидальные колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$ и амплитудой $Ae^{-\frac{r}{2L}t}$, уменьшающейся с течением времени.

II. Общее решение линейного **неоднородного** уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

равно сумме общего решения $y_{0.0.}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и какого-нибудь частного решения исходного неоднородного уравнения $y_{ч.н.}$

$$y = y_{0.0.} + y_{ч.н.}$$

.

Если правая часть уравнения состоит из сумм и произведений функций $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m, e^{\alpha x}, \cos\beta x, \sin\beta x,$ частное решение можно искать методом подбора или методом неопределенных коэффициентов. Для перечисленных функций частное решение неоднородного уравнения имеет сходный с правой частью уравнения вид (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Структура частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в зависимости от вида правой части уравнения

Вид правой части уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	α=0, β=0, α+iβ=0, k≠0 k=0	$y_{ч.н.} = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0$. $y_{ч.н} = x(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0)$

$f(x)=a\ e^{\alpha x}$	β=0, α+iβ=α, $k_1 \neq \alpha$ и $k_2 \neq \alpha$ α= k_1 или α= k_2 $k_1=k_2=\alpha$	$y_{ч.н.}=A\ e^{\alpha x}$ $y_{ч.н.}=Axe^{\alpha x}$ $y_{ч.н.}=Ax^2e^{\alpha x}$
$f(x)=a\cos\beta x$ *или* $f(x)=b\sin\beta x$ *или* $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$	α=0, α+iβ= *i*β, $k_1 \neq i\beta$ и $k_2 \neq i\beta$ $k_1=i\beta$ или $k_2=i\beta$	$y_{ч.н.}=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ $y_{ч.н.}=$ $=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+L_m(x)\sin\beta x),$ где $P_n(x)$ -многочлен n-ой степени, $L_m(x)$- многочлен m-ой степени от x	$k_1 \neq \alpha+i\beta$ и $k_2 \neq \alpha+i\beta$ $k_1=\alpha+i\beta$ или $k_2=\alpha+i\beta$	$y_{ч.н.}=$ $=e^{\alpha x}(Q_l(x)\cos\beta x+$ $+R_l(x)\sin\beta x),$ где *l*- наибольшее из чисел m и n, $y_{ч.н.}=$ $=xe^{\alpha x}(Q_l(x)\cos\beta x+$ $+R_l(x)\sin\beta x),$
$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+$ $+...+f_n(x)$		$y_{ч.н}=y_1+y_2+y_3+...+y_n,$ где y_i - частное решение уравнения с той же левой частью и правой частью, равной $f_i(x)$ $(i=1,2,...n)$.

Неопределенные коэффициенты $A_0,A_1,...,A_m,A,B,$ ...определяют следующим образом: находят производные и подставляют $y_{ч.н.}$ $y'_{ч.н.}$, и $y''_{ч.н.}$ в левую часть уравнения. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной и синусах и косинусах в левой и правой частях дифференциального уравнения, составляют систему алгебраических уравнений для нахождения значений неопределенных коэффициентов.

Пример 11. Решить уравнение $y''-3y'-4y=x^2-\dfrac{13}{8}$.

Решение. Заданное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее однородное уравнение -

$$y''-3y'-4y=0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2-3k-4=0$ имеет корни $k_1=4$, $k_2=-1$. Отсюда

$$y_{o.o.} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

Теперь найдем частное решение данного неоднородного уравнения. Так как правая часть не содержит множителей $e^{\alpha x}$, $\sin\beta x$, $\cos\beta x$, α и β полагаем равными нулю ($e^{\alpha x} = e^0 = 1$, $\sin\beta x = \sin 0$, $\cos\beta x = \cos 0 = 1$). Тогда $\alpha+i\beta=0$, 0 не является корнем характеристического уравнения. Правая часть уравнения представляет собой многочлен второй степени (хотя и неполный), поэтому решение будем искать в виде

$$y_{ч.н.}=A_2x^2+A_1x+A_0.$$

Находим производные и подставляем в данное уравнение:

$$y'_{ч.н.}=2A_2x+A_1.$$

$$y''_{ч.н.}=2A_2,$$

$$2A_2 - 3(2A_2x + A_1) - 4(A_2x^2 + A_1x + A_0) = x^2 \quad или$$

$$-4A_2x^2 + x(-6A_2 - 4A_1) + (2A_2 - 3A_1 - 4A_0) = x^2.$$

Чтобы последнее равенство стало тождеством, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$x^2: \quad -4A_2 = 1,$$

$$x: \quad -6A_2 - 4A_1 = 0,$$

$$x^0: \quad 2A_2 - 3A_1 - 4A_0 = -\frac{13}{8}.$$

Решив систему, найдем

$$\begin{cases} A_2 = -\dfrac{1}{4}, \\ A_1 = \dfrac{3}{8}, \\ A_0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения

$$y_{ч.н.} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x,$$

а общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x.$$

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Как и для систем алгебраических уравнений одним из методов решения является метод исключения. С его помощью решение системы сводится к решению одного дифференциального уравнения второго порядка. Поясним этот метод на примере решения системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

<u>Пример 12.</u> Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y + 9z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 2z. \end{cases}$$

Исключим из первого уравнения неизвестную функцию z. Для этого сначала продифференцируем его по t.

$$y'' = 2y' + 9z'.$$

Затем подставим z' из второго уравнения

$$z' = -y + 2z,$$

$$y'' = 2y' + 9(-y + 2z),$$

$$y'' = 2y' - 9y + 18z. \tag{1}$$

Выразим z из первого уравнения

$$y' = 2y + 9z,$$

$$9z = y' - 2y,$$

$$z = \frac{y' - 2y}{9}. \tag{2}$$

Подставим полученное выражение для z в (1)

$$y'' = 2y' - 9y + 18\frac{y' - 2y}{9},$$

$$y'' = 2y' - 9y + 2y' - 4y,$$

$$y'' - 4y' + 13y = 0. \tag{3}$$

Получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Корни характеристического уравнения $k^2 - 4k + 13 = 0$ равны

$$k_1 = 2 + 3i; \quad k_2 = 2 - 3i.$$

Тогда общее решение (3) имеет вид

$$y = e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t);$$

Чтобы найти z, подставим в (2) выражения для y и y'.

$$y = e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t);$$

$$y' = 2 \cdot e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + e^{2t}(-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t)$$

$$y' = (-3c_1 + 2c_2)\sin 3t \cdot e^{2t} + (2c_1 + 3c_2)e^{2t} \cdot \cos 3t;$$

$$z = \frac{1}{9}\left(y' - 2y\right) = \frac{1}{9}\left(\left(2c_2 - 3c_1\right)sin3t \cdot e^{2t} + (2c_1 + 3c_2) \cdot cos3t \cdot e^{2t} -\right.$$

$$\left. - 2c_1 e^{2t} \cdot cos3t - 2c_2 e^{2t} \cdot sin3t\right);$$

$$z = \frac{e^{2t}(c_2\, cos3t - c_1\, sin3t)}{3}.$$

Итак, получили общее решение системы

$$\begin{cases} z = \dfrac{e^{2t}(c_2\, cos3t - c_1\, sin3t)}{3}, \\ y = e^{2t}\left(c_1\, cos3t + c_2\, sin3t\right). \end{cases}$$

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определения дифференциального уравнения, его общего и частного решений. Сформулируйте задачу Коши для уравнения первого порядка и укажите его геометрический смысл.
2. Изложите метод решения уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.
3. Сформулируйте определение линейного уравнения первого порядка. Изложите метод подстановки для нахождения его общего решения.
4. Как интегрируются уравнения вида $F(x, y', y'')=0$, $F(y, y', y'')=0$?
5. Какой общий вид имеет линейное уравнение второго порядка (однородное и неоднородное)? Какие решения его называются линейно-независимыми? Как получить общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами?

6. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $dt - \sqrt{1-t^2}\,dy = 0.$ *Ответ*: $y = \arcsin t + C.$

б) $t^4 y'' + t^3 y' = 4.$ *Ответ*: $y = \dfrac{1}{t^2} + C_1 \ln|t| + C_2.$

в) $y'' + 25y = \sin 5t.$ *Ответ*: $y = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t - \dfrac{t}{10}\cos 5t.$

г) $tdy - ydt = \sqrt{t^2 + y^2}\,dt.$ *Ответ*: $\dfrac{y}{t} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{t^2}} = Ct.$

д) $y'' + 4y' + 4y = 6xe^{-2x}.$ *Ответ*: $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + x^3 e^{-2x}.$

е) $y'' - y' - 6y = 12x^2 - 2x + 1.$ *Ответ*: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 2x^2 + x - 1.$

7. Решить задачу Коши:

а) $y' + ytgt = \cos^2 t;\quad y(45^o) = 0{,}5.$ *Ответ*: $y = \sin t \cos t.$

б) $y'' - 2y' = 2e^x;\quad y(1) = -1, y'(1) = 0.$ *Ответ*: $y = e^{2x-1} - 2e^x + e + 1.$

8. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} y = C_1 e^t + C_2 e^{9t}, \\ z = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}. \\ . \end{cases}$

б) $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 5y - z. \end{cases}$ *Ответ:* $\begin{cases} y = e^t (C_1 cost + C_2 sint), \\ z = e^t [(2C_1 - C_2) cost + (C_1 + 2C_2) sint]. \\ . \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Указать тип дифференциальных уравнений и найти их решение. Там, где даны начальные условия, кроме общего, найти соответствующее частное решение.

1. $y' \sin x = y \cos x + 2\cos x.$

2. $(1+e^{y})dx - e^{2y} \sin^2 x dy = 0.$

3. $y' = \dfrac{y^2 - 2y}{2x}.$

4. $y' = 2\sqrt{y}\ln x.$

5. $y' e^{x+3y} = x.$

6. $2^{x+y} + y' 3^{x-2y} = 0.$

7. $(\sin(2x+y) - \sin(2x-y))dx = \dfrac{dy}{\sin y}.$

8. $y' ctg x + y = 2.$

9. $\sin x \cdot \sin y dx + \cos x \cdot \cos y dy = 0.$

10. $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0.$

11. $(y^2 - 3x^2)dx + 2xy dy = 0.$

12. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^{y}}).$

13. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$

14. $y - xy' = \dfrac{x}{\cos\frac{y}{x}}.$

15. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

16. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}.$

17. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

18. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2).$

19. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}.$

20. $xy' - y = x tg\dfrac{y}{x}.$

21. $y' = y tg x + 2\sin x; \quad y(0) = -1.$

22. $y' = 2x(x^2 + y); \quad y(0) = 0.$

23. $xy' + y = \sin x; \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi}.$

24. $xy' + y = ln\,x + 1; \quad y(1) = 0.$
25. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2; \quad y(0) = 1.$
26. $y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad y(0) = 0.$
27. $y' cos\,x - y\,sin\,x = 2x; \quad y(0) = 0.$
28. $y' - ytgx = \dfrac{1}{cos^3 x}; \quad y(0) = 0.$
29. $(1-x)(y' + y) = e^{-x}; \quad y(2) = 0.$
30. $y' + y\,cos\,x = sin\,x\,cos\,x; \quad y(0) = -1.$
31. $x^2 y'' = (y')^2.$
32. $tgx \cdot y'' = y' + 1.$
33. $y'' x\,ln\,x = y'.$
34. $\sqrt{y} \cdot y'' = y'.$
35. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$
36. $yy'' = (y')^2.$
37. $y''(1+y) = (y')^2 + y'.$
38. $(y-1)y'' = 2(y')^2.$
39. $(3y+2)y'' = (y')^2.$
40. $yy' + (y')^2 = 1.$
41. $y'' + y' = 2x - 1.$
42. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$
43. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3.$
44. $y'' + y = -4cos\,x - 2\,sin\,x.$
45. $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}.$
46. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2.$
47. $y'' - 4y' = 8 - 16x.$
48. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}.$
49. $2y'' + 7y' + 3y = 222\,sin3x.$
50. $y'' + 3y' = 10 - 6x.$
51. $y'' + 16y = e^x(cos4x - 8\,sin4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$
52. $y'' - 6y' + 25y = 9\,sin4x - 24cos4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$
53. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
54. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$
55. $y'' - 12y' + 36y = 32cos2x + 24sin2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$
56. $y'' - 2y' + y = -12cos2x - 9\,sin2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$

57. $y'' + 25y = e^{x}(cos5x - 10\,sin5x), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4.$

58. $y'' - 3y' + 2y = -\,sin\,x - 7\,cos\,x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7.$

59. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$

60. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

Решить системы дифференциальных уравнений.

61. $\begin{cases} z' = 8z - 3y, \\ y' = 2z + y. \end{cases}$

62. $\begin{cases} z' = 4z + 2y, \\ y' = 4z + 6y. \end{cases}$

63. $\begin{cases} z' = z + y, \\ y' = 3y - 2z. \end{cases}$

64. $\begin{cases} z' = z - 3y, \\ y' = 3z + y. \end{cases}$

65. $\begin{cases} z' + z + 5y = 0, \\ y' - z - y = 0. \end{cases}$

66. $\begin{cases} z' = 5z + 4y, \\ y' = 4z + 5y. \end{cases}$

67. $\begin{cases} z' = 3z - 2y, \\ y' = 2z + 8y. \end{cases}$

68. $\begin{cases} z' = 7z + 3y, \\ y' = z + 5y. \end{cases}$

69. $\begin{cases} z' = 4z - 8y, \\ y' = -8z + 4y. \end{cases}$

70. $\begin{cases} z' = -2y - 5z, \\ y' = -7y + z. \end{cases}$

СОДЕРЖАНИЕ

План 2001/2002, поз. 30

Гладков Лев Львович
Гладкова Галина Александровна

Методические указания и контрольные задания по дисциплине «Высшая математика», часть III для студентов уровня ВО заочной формы обучения специальности 145. 01. 03 «Сети телекоммуникаций»

Редактор Вердыш Н.В.

Подписано к печати ________
Формат 60S84/16
Усл. Печ. Л. 1,5. Уч. - изд. Л. 1,3
Тираж _____экз.   Заказ _____.

Высший государственный колледж связи
220114 г. Минск, Староборисовский тракт 8, к. 2.