ВЫСШИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ

ПРОГРАММА,
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по дисциплине

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Часть I

для студентов заочной формы обучения

специальности 1-45. 01. 03 «Сети телекоммуникаций»

МИНСК 2003

Составители: Гладков Л.Л.
Гладкова Г.А.
Чумакова Р.В.

Приведены программа, методические указания по самостоятельному изучению дисциплины «Высшая математика», а также задания на выполнение контрольной работы.

Предназначены для студентов заочной формы обучения специальности 1-45. 01. 03 -Сети телекоммуникаций.

Рецензент: Рябенкова Л.А.

Издание утверждено на заседании кафедры М и Ф
12.04.2003г., протокол №8
Зав. кафедрой Л.Л. Гладков

ВВЕДЕНИЕ

В пятом семестре студенты ВКС по высшей математике выполняют контрольную работу №1.

Для того, чтобы успешно ее выполнить, необходимо изучить сначала теоретический материал по одному из учебников, указанных в списке литературы, и конспекту обзорных лекций. При этом следует ориентироваться на рабочую программу, приведенную ниже. Затем внимательно разобрать решения примеров из данной методической разработки и выполнить задания для самопроверки.

При оформлении контрольной работы для замечаний преподавателя оставляются поля. Перед решением задачи полностью записывается ее условие. Решение следует сопровождать короткими пояснениями с указанием использованных формул и теорем. Чертежи должны быть выполнены аккуратно. В конце работы ставится дата ее завершения, приводится список проработанной литературы. Работа подписывается.

Выбор варианта контрольной работы определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки. Получив проверенную работу, студент обязан выполнить указания, сделанные рецензентом. Если работа не зачтена, следует сделать работу над ошибками в той же тетради и представить работу на повторную рецензию.

К сдаче экзамена или зачета допускаются студенты, имеющие на руках зачтенные контрольные работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. т.1,т.2.- М.: Наука, 1976 (и последующие издания).

2. Высшая математика. Общий курс. Под редакцией Яблонского А.И. Минск. Вышэйшая школа. 1993.

3. Сборник задач по общему курсу высшей математики. Под редакцией Яблонского А.И. Минск. Вышэйшая школа. 1994.

4. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. - Мн.: Вышэйшая школа, 1967.

5. Руководство к решению задач по высшей математике. /Под ред. Гурского Е.И. Часть I. - Мн.: Вышэйшая школа, 1989.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. 1, 2 части. - М.: Высш. шк., 1991.

Таблица 1

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№ варианта	№№ задач							
1	1	11	21	31	41	51	61	71
2	2	12	22	32	42	52	62	72
3	3	13	23	33	43	53	63	73
4	4	14	24	34	44	54	64	74
5	5	15	25	35	45	55	65	75
6	6	16	26	36	46	56	66	76
7	7	17	27	37	47	57	67	77
8	8	18	28	38	48	58	68	78
9	9	19	29	39	49	59	69	79
10	10	20	30	40	50	60	70	80
11	1	12	23	34	45	56	67	78
12	2	13	24	35	46	57	68	79
13	3	14	25	36	47	58	69	80
14	4	15	26	37	48	59	70	71
15	5	16	27	38	49	60	61	72
16	6	17	28	39	50	51	62	73
17	7	18	29	40	41	52	63	74
18	8	19	30	31	42	53	64	75
19	9	20	21	32	43	54	65	76
20	10	11	22	33	44	55	66	77
21	10	19	28	37	46	55	64	73
22	9	18	27	36	45	54	63	72
23	8	17	26	35	44	53	62	71
24	7	16	25	34	43	52	61	80
25	6	15	24	33	42	51	70	79
26	5	14	23	32	41	60	69	78
27	4	13	22	31	50	59	68	77
28	3	12	21	40	49	58	67	76
29	2	11	30	39	48	57	66	75
30	1	20	29	38	47	56	65	74

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. Функция. Основные элементарные функции и их графики. Сложные и обратные функции.
2. Предел функции в точке и в бесконечности.
3. Непрерывность функций. Свойства функций непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.
4. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила нахождения производной.
5. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.
6. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Свойства дифференциала, инвариантность его формы.
7. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
8. Производные и дифференциалы высших порядков.
9. Правило Лопиталя.
10. Монотонность функции. Признак монотонности. Экстремум функции, необходимый и достаточные признаки существования экстремума.
11. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
12. Асимптоты графика функции. Схема исследования функции и построение ее графика.
13. Первообразная, неопределенный интеграл, его простейшие свойства. Таблица основных первообразных.
14. Непосредственное интегрирование функции. Интегрирование заменой переменной (подстановкой). Интегрирование по частям.
15. Интегрирование рациональной функции с помощью разложения на простейшие дроби.
16. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен, и иррациональных функций.
17. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок. Интегрирование гиперболических функций.
18. Задачи, приводящие к понятию интеграла. Интеграл от непрерывной функции как предел интегральной суммы, формулировка теоремы о существовании определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.
19. Производная от интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
20. Вычисление интеграла с помощью интегрирования по частям и заменой переменной.
21. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования и с неограниченной подынтегральной функцией.
22. Приложение определенных интегралов:
    a.) вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Вычисление длины дуги. Применение интеграла к вычислению объема тела и площади поверхности вращения;
    b.) применение интеграла к решению физических задач.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной при $x = x_0$ (или в точке x_0), если предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции при $x = x_0$, т.е. имеет место равенство:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной при $x = x_0$, требуется выполнение следующих условий:

1) функция $y = f(x)$ должна быть определена не только в самой точке x_0, но и в некотором интервале, содержащем эту точку;
2) функция $y = f(x)$ должна иметь конечные и совпадающие между собой односторонние пределы, т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a$;
3) предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, т.е. число а должно совпадать со значением функции в точке x_0, т.е. должно выполняться равенство $f(x_0) = a$.

Функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то функция называется разрывной в точке x_0, сама точка называется точкой разрыва функции.

Различают следующие виды точек разрыва:

1) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция $y = f(x)$ в точке x_0 не определена или определена, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой <u>устранимого</u> разрыва. Для устранения разрыва функцию надо доопределить в точке x_0; то есть принять $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
2) существуют конечные односторонние пределы в точке x_0, но они не равны друг другу, то x_0 называется точкой разрыва первого рода, или скачком, в этом случае модуль разности $\left|\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) - \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)\right|$ называется скачком функции $y = f(x)$ в точке разрыва $x = x_0$;
3) если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞, следовательно, не существует и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;, то x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Разрывы первого и второго рода являются неустранимыми.

Пример 1. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1, \\ -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, & 1 < x < 4, \\ \frac{1}{x-5}, & 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

Решение. Функции $f_1(x)=2^x$ и $f_2(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ непрерывны в области определения, функция $f_3(x)=\frac{1}{x-5}$ - не определена в точке x=5.

Следовательно, точками разрыва функции *f(x)* могут быть точки перехода от одного аналитического выражения к другому $x=1$ и $x=4$, и точка x=5, где функция не определена.

а) Исследуем точку x=1. Вычислим односторонние пределы при $x\to 1$ слева и справа

$$\lim_{x\to 1-0} 2^x = 2;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)=1.$$

Итак, при $x\to 1$ функция *f(x)* имеет конечные односторонние пределы, причем эти пределы различны. Следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва 1-ого рода.

Модуль разности между правым и левым пределами в точке разрыва первого рода есть скачок. В данном случае скачок равен 1.

б) Рассмотрим точку x=4.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to 4+0}\left(\frac{1}{x-5}\right)=-1.$$

При $x\to 4$ функция *f(x)* имеет левый и правый конечные пределы, эти пределы равны между собой. Однако функция не определена в этой точке.

Следовательно, при $x\to 4$ функция имеет устранимый разрыв. Разрыв можно устранить, если условиться, что при $x=4, y=-1$, то есть доопределить функцию.

в) Точка x=5.

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{x-5}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{x-5}=\infty.$$

Таким образом, точка $x=5$ является точкой разрыва 2-ого рода.

График данной функции представлен на рис.1.

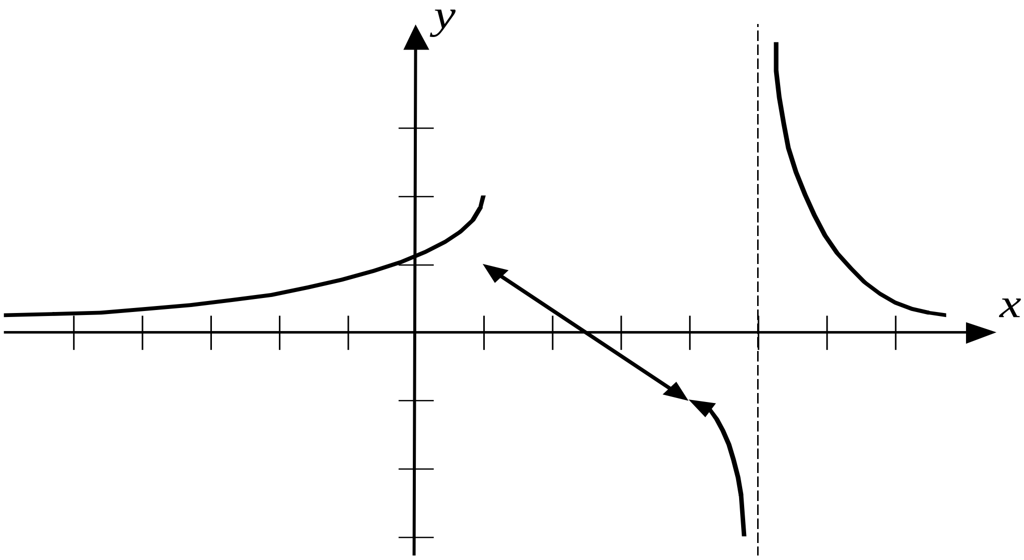


Рис.1

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Для того, чтобы при изучении последующих разделов высшей математики и других учебных дисциплин не возникали затруднения, необходимо знать наизусть приведенные ниже основные правила и формулы дифференцирования. Они составлены с учетом теоремы о дифференцировании сложной функции.

1. $C' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(cu)' = c \cdot u'$.
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
5. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
7. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
8. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
10. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
11. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, где $u > 0$.
12. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$, где $u > 0, a > 0, a \neq 1$.
13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
14. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
15. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
16. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
17. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
18. $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
19. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
20. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.
21. $(shu)' = chu \cdot u'$.
22. $(chu)' = shu \cdot u'$.
23. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$.
24. $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

Техника дифференцирования подробно рассматривалась в курсе математики на уровне среднего специального образования и изложена во многих учебниках и задачниках (см. список рекомендуемой литературы). Поэтому, далее в методических указаниях будут рассмотрены примеры, которые либо отличаются от пройденного ранее материала, либо будут способствовать более глубокому его изучению.

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НЕЯВНО

Если зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением $y = f(x)$, т.е. уравнением, которое разрешено относительно y, то y называется явной функцией от аргумента x.

Если же зависимость между переменными x и y задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

которое не разрешено относительно функции y, то y называется неявной функцией от аргумента x.

Чтобы найти производную y' неявной функции y, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$, надо продифференцировать по переменной x обе части этого равенства, считая что y есть функция от x, затем полученное уравнение решить относительно производной y'.

Пример 2. Найти производную неявной функции, заданной уравнением $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$.

Решение. Дифференцируем заданное соотношение по x, рассматривая y как функцию от x:

$$e^x \sin y + e^x \cos y \cdot y' - e^y y' \cos x - e^y(-\sin x) = 0;$$

$$y'(e^x \cos y - e^y \cos x) = -(e^x \sin y + e^y \sin x);$$

$$y' = \frac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^y \cos x - e^x \cos y}.$$

Эту производную можно найти другим способом, используя метод предварительного логарифмирования. Преобразуем исходное уравнение

$$e^x \sin y = e^y \cos x.$$

Логарифмируем левую и правую части.

$$\ln(e^x \sin y) = \ln(e^y \cos x).$$

Упростим данное выражение, используя свойства логарифмов.

$$\ln e^x + \ln \sin y = \ln e^y + \ln \cos x$$

$$x + \ln \sin y = y + \ln \cos x.$$

Дифференцируем по x левую и правую части

$$1 + \frac{\cos y}{\sin y} y' = y' - \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$1 + tgx = y'(1 - ctgy).$$

Находим

$$y' = \frac{1 + tgx}{1 - ctgy}.$$

Используя исходное уравнение, два полученных выражения для y' можно привести к одинаковому виду.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

При отыскании предела функции часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределённым выражениям вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty \cdot \infty$; 0^0; ∞^0 и т.д.

Основным аппаратом для раскрытия неопределённостей такого вида служит правило Лопиталя: предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных, если он существует или равен бесконечности.

1. **Неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.**

Согласно правилу Лопиталя в этих случаях можно заменить отношение величин отношением их производных, т.е. если $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ одновременно стремятся к нулю или бесконечности при $x \to a$ или $x \to \infty$ и предел $\dfrac{\varphi'(x)}{\Psi'(x)}$ существует или равен ∞, то

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\Psi'(x)}.$$

Если же отношение производных представляет неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя можно применять снова.

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}.$$

Решение. Подстановка предельного значения $x = \pi$ приводит к неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\pi} \frac{(\ln\cos 2x)'}{(\ln\cos 4x)'} = \lim_{x\to\pi} \frac{\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{\dfrac{-4\sin 4x}{\cos 4x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pi} \frac{tg\,2x}{tg\,4x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pi} \frac{(tg\,2x)'}{(tg\,4x)'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pi} \frac{2\cos^2 4x}{\cos^2 2x \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

2. Неопределённости вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$.

Если $\varphi(x) \to 0$ и $\Psi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то отыскание $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\cdot\Psi(x)$ - (неопределённость вида $0 \cdot \infty$) можно свести к неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ при помощи тождественных преобразований.

$$\varphi(x)\cdot\Psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\Psi(x)}}, \tag{7}$$

или

$$\varphi(x)\cdot\Psi(x) = \frac{\Psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}. \tag{8}$$

Если $\varphi(x) \to \infty$ и $\Psi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то отыскание $\lim\limits_{x\to x_0} [\varphi(x) - \Psi(x)]$ (неопределённость вида $\infty - \infty$) можно свести к неопределённости вида $0 \cdot \infty$ путём тождественного преобразования разности функций в произведение

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \varphi(x)\cdot\Psi(x)\left[\frac{1}{\Psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}\right], \tag{9}$$

или

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \varphi(x)\cdot\left[1 - \frac{\Psi(x)}{\varphi(x)}\right], \tag{10}$$

или

$$\varphi(x)-\Psi(x)=\Psi(x)\left[\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}-1\right]. \qquad (11)$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} ctgx\cdot\ln(x+e^x)$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\infty\cdot 0$, преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к 0.

$$\lim_{x\to 0} ctgx\cdot\ln(x+e^x)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{\dfrac{1}{ctgx}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+e^x))'}{(tgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+e^x}\cdot(1+e^x)}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+e^x)\cos^2 x}{x+e^x}=2.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$.

Тождественно преобразуем по формуле (9).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot(e^x-1)}\cdot(e^x-1-x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(xe^x+e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x}=\frac{1}{2}.$$

3. Неопределённости вида 0^0, ∞^0, 1^∞.

При отыскании предела функции вида $f(x)=\varphi(x)^{\Psi(x)}$ поступаем следующим образом: функция *f(x)* логарифмируется и находится предел её логарифма, затем по найденному пределу логарифма находится предел самой функции .

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to +0}(ctg\,2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Решение. Имеет место неопределённость вида ∞^0.

Логарифмируем выражение $a=\lim\limits_{x\to +0}(ctg\,2x)^{\frac{1}{\ln x}}$:

$$\ln a=\ln\lim_{x\to +0}(ctg\,2x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Найдём предел логарифма:

$$\ln a = \lim_{x\to+0} \ln(ctg\,2x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{\ln x}\cdot \ln(ctg\,2x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln ctg\,2x}{\ln x} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln ctg\,2x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{ctg\,2x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)\cdot 2}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{-2x}{ctg\,2x \sin^2 2x} = \lim_{x\to+0} \frac{-4x}{\sin 4x} = -1.$$

Итак, $\ln a = -1,$ следовательно, $a = e^{-1}$ и $\lim_{x\to+0}(ctg\,2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}.$

Пример 7. Найти $\lim_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

Решение. Имеет место случай 1^{∞}.

Преобразовывая $\ln a = \lim_{x\to1}\cdot \ln(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to1} tg\,\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2-x) = \lim_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{ctg\,\frac{\pi x}{2}}$,

получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применим правило Лопиталя

$$\ln a = \lim_{x\to1} \frac{(\ln(2-x))'}{(ctg\,\frac{\pi x}{2})'} = \lim_{x\to1} \frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to1} \frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\pi\cdot(2-x)} = \frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $\ln a = \frac{2}{\pi}$ и $a = e^{\frac{2}{\pi}}$, то есть $\lim_{x\to1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

При построении графика функции с помощью методов дифференциального исчисления целесообразно придерживаться плана действий:

1. Установите область определения функции.
2. Если она симметрична относительно начала координат, проверьте функцию на четность и нечетность.
3. Проверьте функцию на периодичность.
4. Исследуйте непрерывность функции. Определите поведение функции в окрестностях точек разрыва первого рода и граничных точек области определения. Для этого вычислите односторонние пределы функции при стремлении аргумента функции к указанным точкам.
5. Найдите асимптоты графика функций.
6. Определите интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения функции.
7. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба.

8. Определите, если это несложно, координаты точек пересечения графика функций с осями координат, а также нескольких дополнительных точек, принадлежащих графику.

Пример 8. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение.

1. Область определения $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.
2. Поскольку область определения несимметрична относительно начала координат, то исследуемая функция общего вида, т.е. не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция не является периодической.
4. Точка разрыва $x=-1$.

$$\lim_{\substack{x\to-1-0\\x<-1}}\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}=-\infty,\qquad \lim_{\substack{x\to-1+0\\x>-1}}\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}=-\infty.$$

В точке $x=-1$ имеется разрыв второго рода.

5. Найдем асимптоты графика функции:
   a) вертикальная асимптота - $x=-1$,
   b) наклонная асимптота $y=kx+b$,

где $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2\cdot(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2x^2+4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=-1.$$

$$y=\frac{x}{2}-1$$ — наклонная асимптота.

6. Определим точки экстремума и интервалы монотонности функции:

$$y'=\left(\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}\right)'=\left(\frac{x^3}{2x^2+4x+2}\right)'=\frac{3x^2(2x^2+4x+2)-x^3(4x+4)}{4(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2x^4+8x^3+6x^2}{4\cdot(x+1)^4}==\frac{x^4+4x^3+3x^2}{2\cdot(x+1)^4}=\frac{x^2\cdot(x^2+4x+3)}{2\cdot(x+1)^4}=$$

$$=\frac{x^2(x+1)(x+3)}{2(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Найдем критические точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$y'=0;\quad\Leftrightarrow\quad x^2(x+3)=0;\Rightarrow\quad x_1=0;\ x_2=-3.$$

Кроме того, производная не существует в точке x=-1. Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала. Знак производной в каждом интервале устанавливаем методом контрольных точек.

$$y'(-4)=\frac{16\cdot(-1)}{2\cdot(-3)^3}=\frac{8}{27}>0,\qquad y'(-2)=\frac{4}{2\cdot(-1)^3}=-2<0,$$

$$y'(-0{,}5)=\frac{0{,}25\cdot2{,}5}{2\cdot0{,}5^3}=2{,}5>0,\qquad y'(1)=0{,}25>0.$$

Результаты сводим в таблицу:

Таблица 2

x	(-∞;-3)	-3	(-3;-1)	-1	(-1;0)	0	(0; +∞)
y'	+	*0*	—	не сущ	+	0	+
y	↗	*Max*	↘	не сущ	↗		↗

В интервалах (-∞;-3), (-1; +∞) функция возрастает, в интервале (-3;-1) - убывает. Точка x=-3 - точка максимума.

$$y_{\max}=y(-3)=\frac{(-3)^3}{2\cdot(-3+1)^2}=-\frac{27}{8}=-3{,}375.$$

В точке x=0 экстремума нет.

7. Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2+6x\right)\cdot(x+1)^3-\left(x^3+3x^2\right)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{3(x+1)^2\cdot\left(\left(x^2+2x\right)\cdot(x+1)-x^3-3x^2\right)}{2(x+1)^6}=\frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Очевидно, что $y''=0$ при $x=0$, и y'' не существует, когда $x=-1$.

График функции вогнутый, если $y''>0$, и выпуклый, если $y''<0$. Составляем таблицу:

Таблица 3.

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$x>0$
y''	-	не сущ.	-	0	+
y	∩	точка разрыва	∩	Перегиб	∪

В -интервалах $(-\infty;-1)$ и $(-1;0)$ график функции выпуклый; в интервале $(0;+\infty)$ - вогнутый.

При переходе через точку $x=0$ знак второй производной изменяется. Значит $x=0$ - точка перегиба $(y(0)=0)$.

8. Найдем точки пересечения с осями координат.

$x=0,\quad y=0,\quad (0;0)$

$y=0,\quad x=0,\quad (0;0).$

Перед построением графика вычислим координаты нескольких его точек.

Таблица 4.

X	-5	-2	-1,5	-0,5	1
$У$	~-3,9	-4	-6,75	-0,25	0,125

Используя полученные результаты строим график функции.

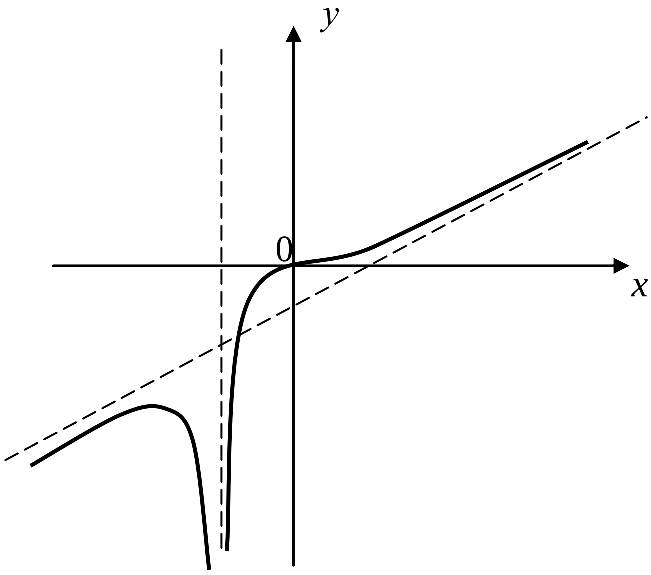


Рис.2

Неопределенный интеграл

Пусть Δ - конечный или бесконечный промежуток числовой оси, и на Δ заданы функции f(x) и F(x).

Определение. Функция *F(x)* называется первообразной функцией функции *f(x)* на промежутке Δ, если *F(x)* дифференцируема на Δ, и в каждой точке этого промежутка производная функции *F(x)* равна значению функции *f (x)*:

$$F'(x) = f(x), x \in \Delta$$

Очевидно, что одной производной соответствует бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга только постоянным слагаемым. Действительно, если функция *F(x)* является первообразной от функции *f(x)* для всех $x \in \Delta$, то и любая функция $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная величина, также является первообразной от функции *f(x)*; в этом легко убедиться, продифференцировав функцию

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x), x \in \Delta.$$

Определение. Пусть функция f(x) задана на некотором промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных $F(x) + C$ на этом промежутке называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где *f(x)dx* -подынтегральное выражение, *f(x)* - подынтегральная функция, *x* - переменная интегрирования, *C* - произвольная постоянная.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$ на плоскости. Причем, кривые этого семейства обладают следующим свойством: касательные, проведенные к графикам этих кривых в точках с одинаковой абсциссой, параллельны. График любой первообразной может быть получен сдвигом вверх или вниз графика функции $y = F(x)$ на величину *C*.

Приведем формулы интегрирования, которые непосредственно следуют из формул дифференцирования основных элементарных функций.

1. $\int t^k dx = \dfrac{t^{k+1}}{k+1} + C, k \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C.$

3. $\int a^t dt = \dfrac{a^t}{\ln a} + C.$

4. $\int e^t dt = e^t + C.$

5. $\int \cos t dt = \sin t + C.$

9. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin \dfrac{t}{a} + C.$

10. $\int \dfrac{dt}{t^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{t}{a} + C.$

11. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{t^2 + a}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + a}\right| + C.$

12. $\int \dfrac{dt}{t^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{t-a}{t+a}\right| + C.$

13. $\int chtdt = sht + C.$

6. $\int \sin t dt = -\cos t + C.$

14. $\int sht dt = cht + C.$

7. $\int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C.$

15. $\int \frac{dt}{ch^2 t} = tht + C.$

8. $\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -ctgt + C.$

16. $\int \frac{dt}{sh^2 t} = -ctht + C.$

Свойство 1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой функции плюс произвольная постоянная, то есть

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

Доказательство: Так как $df(x) = f'(x)dx$ и f является первообразной для своей производной f', то $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C.$

Свойство 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Доказательство: Пусть *F(x)* – одна из первообразных функции $f(x)$, тогда, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где $F'(x) = f(x), dF(x) = f(x)dx.$ Следовательно, $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx.$

Свойство 3. Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций, то есть

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Свойство 4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Доказательство свойств 3 и 4 аналогично доказательству первых двух свойств.

Непосредственное интегрирование

При непосредственном интегрировании данный интеграл приводят к одному из табличных интегралов, применяя тождественные преобразования и свойства неопределенного интеграла.

Пример 9:

$$\int \left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}} \right) dx.$$

Воспользуемся определением степени с дробным и отрицательным показателем и правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями $(a^m \cdot a^n = a^{m+n})$:

$$\int\left(\sqrt{x\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}\right)dx=\int x^{\frac{3}{4}}\cdot dx-2\int x^{-\frac{4}{3}}dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+6x^{-\frac{1}{3}}+C=\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+C.$$

Интегрирование методом замены переменной

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью свойств неопределенного интеграла и элементарных преобразований, используют метод подстановки или замены переменной интегрирования. Его суть заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к интегралу, который берется непосредственным интегрированием.

Примеры:

10. $\int\frac{dx}{16+25x^2}.$

Естественными преобразованиями подынтегральное выражение приведем к интегралу вида

$$\int\frac{dx}{16+25x^2}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{1+\frac{25}{16}x^2}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{4}x\right)^2}.$$

Введем новую переменную t = 5*x*/4, тогда dt = 5d*x*/4. Откуда d*x* = =4dt/5.

$$\int\frac{dx}{16+25x^2}=\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{5}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{20}arctgt+C=\frac{1}{20}arctg\,\frac{5}{4}x+C.$$

11. $\int\frac{xdx}{x^2-4x+5}.$

Многочлен x^2-4x+5 не имеет действительных корней. Выделяем полный квадрат в знаменателе: $x^2-4x+5=x^2-4x+4+5-4=(x-2)^2+5-4=(x-2)^2+1.$

Далее,

$$\int\frac{xdx}{x^2-4x+5}=\int\frac{xdx}{(x-2)^2+1}=\int\frac{x-2+2}{(x-2)^2+1}dx.$$

Значит, искомый интеграл равен сумме двух интегралов:

$\int\frac{x-2}{(x-2)^2+1}dx+2\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}.$ Применим подстановку $t=(x-2)^2+1.$ Тогда $dt=2(x-2)dx$ и $\frac{1}{2}dt=(x-2)dx.$ Окончательно получаем:

$$\int\frac{x-2}{(x-2)^2+1}dx+2\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+2arctg(x-2)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln((x-2)^2+1)+2arctg(x-2)+C=\ln\sqrt{x^2-4x+5}+2arctg(x-2)+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональная функция одной переменной может быть представлена в виде $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)},$ где $Q(x),P(x)$ - многочлены. Для нахождения интегралов вида $\int R(x)dx$, подынтегральную функцию раскладывают на простейшие дроби. При этом, если степень многочлена $Q(x)$ больше или равна степени многочлена $P(x),$ то предварительно выделяют в $R(x)$ целую часть делением одного многочлена на другой.

Примеры:

12. $\displaystyle\int\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Из равенства дробей с одинаковыми знаменателями следует равенство их числителей:

$x+4=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$

Неизвестные A, B, C, можно найти достаточно легко следующим образом. Подставляем в последнее равенство $x=1$ и получаем, что $5=A(1-2)(1-3),$ то есть $A=\dfrac{5}{2}.$ Далее, полагая $x=2$, получаем $B=-6.$ Наконец, при $x=3$ легко увидеть, что $C=\dfrac{7}{2}.$

Следовательно, искомый интеграл равен сумме трех интегралов:

$$\int\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx=\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-1}-6\int\frac{dx}{x-2}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=\frac{5}{2}\ln|x-1|-6\ln|x-2|+\frac{7}{2}\ln|x-3|+C=\ln\frac{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^7}}{(x-2)^6}+C.$$

13. $\displaystyle\int\frac{x}{x^3-8}dx.$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x}{x^3-8}=\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}=\frac{A(x^2+2x+4)+Bx(x-2)+C(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

Приравниваем числители дробей:

$$x=A(x^2+2x+4)+Bx(x-2)+C(x-2)$$

или $$x=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(4A-2C).$$

Неизвестные A,B,C найдем другим способом. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

при x^2: $A+B=0,$

при x^1: $2A-2B+C=1,$

при x^0: $4A-2C=0.$

Решив ее, получим $A=\dfrac{1}{6},B=-\dfrac{1}{6},C=\dfrac{1}{3}.$

Следовательно, искомый интеграл равен сумме интегралов:

$$\int \frac{x}{x^3-8}dx = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{(x+1)^2+3}dx = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6}\int\frac{x+1}{(x+1)^2+3}dx + \frac{3}{6}\int\frac{dx}{(x+1)^2+3} =$$
$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

В некоторых случаях интегрирование иррациональных функций с помощью надлежащих подстановок можно свести к интегрированию рациональных дробей $R(x)$.

Пример 14:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx.$$

Введем новую переменную $t=\sqrt[4]{x}$. Тогда $x=t^4, \sqrt{x}=t^2, dx=4t^3dt.$ Предлагаемая замена позволяет свести искомый интеграл к интегралу от рациональной функции.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx = 4\int\frac{t^2}{t^2+1}dt.$$

Степень многочлена, стоящего в числителе подынтегральной дроби, равна степени многочлена, стоящего в ее знаменателе, то есть дробь неправильная. Поэтому перед разложением дроби на простейшие, выделяют общую часть, а затем делят многочлен числителя на многочлен знаменателя. В нашем случае проще выделить в числителе многочлен, стоящий в знаменателе, прибавив и отняв в числителе единицу.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx = 4\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 4(\int dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt) = 4t - 4arctgt + C = 4\sqrt[4]{x} - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений

Основным методом нахождения интегралов от тригонометрических функций является метод подстановки. Интегралы вида: $\int R(\cos x, \sin x)dx$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ сводятся к интегралам от рациональных функций аргумента t.

Пример 15: $\int \frac{dx}{9+7\cos x+4\sqrt{2}\sin x}.$

Так как подынтегральная функция представляет собой рациональную функцию от аргументов $\sin x$ и $\cos x$, искомый интеграл сводим к интегрированию рациональной дроби с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}.$ Выражаем $x, \sin x, \cos x, dx$ через переменную t с помощью следующих формул:

$$x = 2arctgt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Далее, под знаком искомого интеграла получаем выражение вида:

$$\int \frac{1}{9+\frac{7(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{8\sqrt{2}t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)(9+9t^2+7-7t^2+8\sqrt{2}t)}=\int\frac{dt}{t^2+4\sqrt{2}t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+\sqrt{8})^2}=-\frac{1}{t+\sqrt{8}}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+\sqrt{8}}+C.$$

В некоторых частных случаях удобно применять другие подстановки, кроме универсальной. Это подстановки вида:

1. $t=\cos x,$ если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$
2. $t=\sin x,$ если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$
3. $t=tgx,$ если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x).$

Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right],$$

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right],$$

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x\right].$$

Пример 16.

$$\int\frac{dx}{9\cos^2 x+16\sin^2 x}.$$

Так как для подынтегральной функции выполняется условие $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$ применим подстановку $t=tgx,$ предварительно разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x.$

$$\int\frac{dx}{9\cos^2 x+16\sin^2 x}=\int\frac{1}{16tg^2x+9}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{dt}{16t^2+9}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{\left(\frac{4}{3}t\right)^2+1}.$$

При помощи следующей подстановки : $\frac{4}{3}t=z,$ $dz=\frac{4}{3}dt$ сводим полученный интеграл к табличному.

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{12}arctg(\frac{4}{3}tgx).$$

$$\int\sin^3 x\cos x\sin 2xdx.$$

Преобразуем подынтегральную функцию: $\sin^3 x\cos x\sin 2x=2\sin^4 x\cos x.$ Заметим, что если вместо функции $\cos x$ подставить $-\cos x,$ будет выполнено условие $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$ Поэтому применим подстановку $t=\sin x.$ Получаем:

$$2\int\sin^4 x\cos xdx=2\int t^4dt=\frac{2\sin^5 x}{5}+C.$$

Метод интегрирования по частям

Согласно правилу дифференцирования произведения имеем $d(uv)=vdu+udv.$ Поэтому $udv=d(uv)-vdu.$ Интегрируя обе части этого равенства, получим $\int udv=\int d(uv)-\int vdu.$ Используя свойство неопределенных интегралов: $\int d(uv)=uv+C,$ получим формулу $\int udv=uv-\int vdu.$ Эта формула называется формулой интегрирования по частям.

Применение формулы интегрирования по частям удобно в тех случаях, когда подынтегральное выражение удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и vdu было более простой задачей, чем интегрирование исходного выражения udv.

Пример 17:

$\int x\ln xdx$.

Положим $u=\ln x, dv=xdx,$ тогда $du=\frac{dx}{x}, v=\frac{x^2}{2}.$ Согласно формуле интегрирования по частям, $\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$

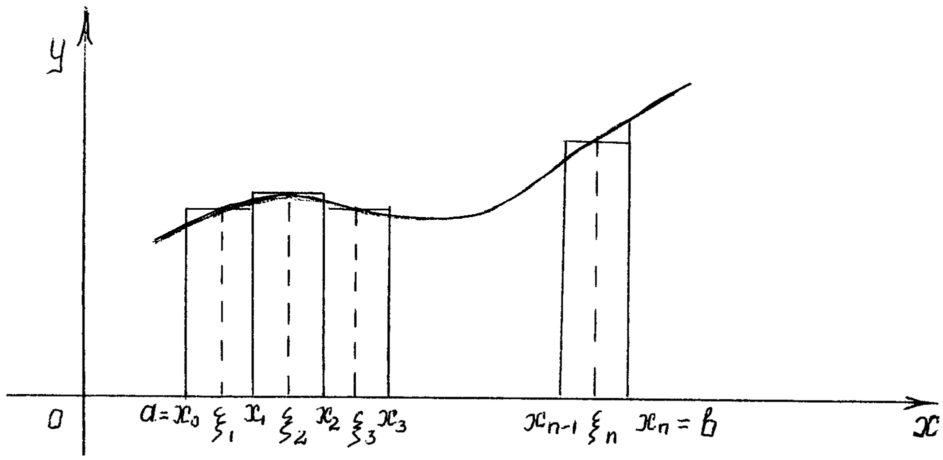
Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла приводят самые разнообразные задачи, например, вычисления площади плоской фигуры, отыскания работы переменной силы, нахождения пути по заданной переменной скорости и так далее. Рассмотрим задачу вычисления площади криволинейной трапеции.

Пусть функция у = $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a,b]$ числовой оси. Разобьем этот отрезок произвольным образом на n частей точками $a=x_0<x_1<...<x_n=b.$ На каждом из полученных отрезков $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольные точки $\xi_1,\xi_2,...\xi_n$ и составим сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Полученная сумма $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой.



Геометрически каждое слагаемое интегральной суммы равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. А вся интегральная сумма равна площади, получаемой “ступенчатой” фигуры.

Площадь этой n - ступенчатой фигуры мы будем считать приближенным значением площади заданной криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной осью OX, графиком непрерывной функции y = $f(x)$ и двумя прямыми x = a и x = b. Причем, значение площади криволинейной трапеции будет тем более точным, чем больше n и чем меньше длины всех частичных отрезков. Отсюда понятно, что площадью получаемой криволинейной трапеции следует называть предел, к которому стремится площадь n - ступенчатой фигуры при неограниченном увеличении числа n и при стремлении к нулю наибольшего из отрезков Δx_i.

Если существует предел, он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i - 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Свойство 2. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также

$\int_a^b f(x)dx$ и для любого взаимного расположения точек a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Если функции $f(x)$ и g(x) интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого действительного числа λ функция $\lambda f(x)$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$ и

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Свойство 5</u>. Если функция $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Если функция $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

В отличие от неопределенного интеграла, представляющего собой совокупность всех первообразных от данной функции, определенный интеграл есть число. Для его вычисления применяют формулу Ньютона- Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Т. е. значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной от подынтегральной функции в интервале интегрирования.

Непосредственное интегрирование определенных интегралов

Пример 18:

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{x^3}+1}{x-\sqrt{x}+1}dx.$$

Воспользуемся формулой $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{x^3}+1}{x-\sqrt{x}+1}dx = \int_2^3 \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}dx = \int_2^3 (\sqrt{x}+1)dx = \int_2^3 \sqrt{x}dx + \int_2^3 dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_2^3 + x\Big|_2^3 = \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} + 3 - 2 = \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}+3}{3}.$$

Замена переменной в определенном интеграле

При вычислении определенного интеграла методом подстановки находят новые пределы интегрирования. Покажем это на примере.

Пример 19:

$$\int_4^5 \sqrt[4]{x-3}dx.$$

Введем новую переменную t = x - 3, тогда dt = dx. Вычислим новые пределы интегрирования по переменной t:

при $x = 4$ $t_H = 4-3 = 1,$ при $x = 5$ $t_B = 5-3 = 2.$

Получаем

$$\int_4^5 \sqrt[4]{x-3}dx = \int_1^2 \sqrt[4]{t}dt = \int_1^2 t^{\frac{1}{4}}dt = \left.\frac{4t^{\frac{5}{4}}}{5}\right|_1^2 = \left.\frac{4}{5}\sqrt[4]{t^5}\right|_1^2 = \frac{4}{5}\sqrt[4]{2^5} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{1^5} = \frac{4}{5}(2\sqrt[4]{2}-1).$$

Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 20:

$$\int_0^1 xe^{3x}dx.$$

Положим $u = x, dv = e^{3x}dx;$ тогда $du = dx, v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$ Следовательно,

$$\int_0^1 xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.$$

Несобственные интегралы

Интегралы вида $\int_0^{+\infty} f(x)dx,$ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называются несобственными интегралами с бесконечными пределами интегрирования.

Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом конечном отрезке $[a,b]$, то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c - произвольная точка на оси Ox.

Если существуют конечные пределы правых частей этих равенств, то несобственный интеграл называется сходящимся; если эти пределы бесконечны или не существуют, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Если подынтегральная функция $y = f(x)$ в какой либо точке интегрирования имеет разрыв, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом от разрывной функции.

Если функция имеет разрыв второго рода в начальной точке интегрирования, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Если функция имеет разрыв в конечной точке области интегрирования, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

А если функция имеет разрыв в промежуточной точке области интегрирования c, принадлежащей отрезку $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Несобственные интегралы от разрывной функции называются сходящимися, если существуют конечные пределы правых частей соответствующих равенств; в противном случае - расходящимися.

Пример 21:

Вычислим несобственные интегралы от функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$ на бесконечном промежутке $[1,+\infty)$ и на полуинтервале $(0,1]$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = +\infty.$$

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, если $\alpha \ne 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \begin{cases} +\infty, \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \end{cases}.$$

Итак, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$, если $\alpha \ne 1$.

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^1 = \begin{cases} +\infty, \alpha > 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, \alpha < 1 \end{cases}.$$

Получили, что интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

Некоторые применения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, графиком непрерывной функции $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

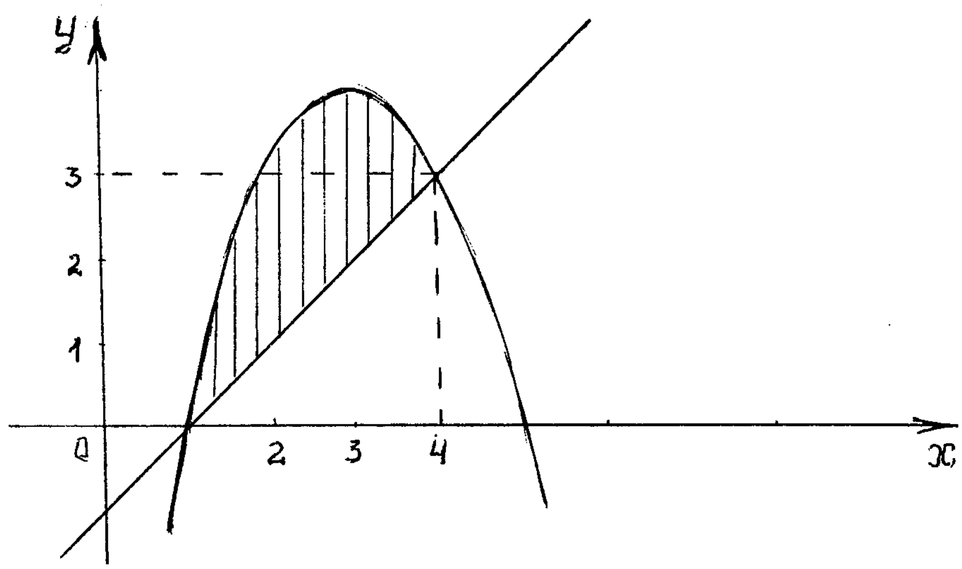
$$S = \int_a^b f(x)dx \quad \text{, если} \quad f(x) > 0 \quad \text{или} \qquad S = -\int_a^b f(x)dx \text{ ,} \quad \text{если} \quad f(x) < 0 \text{ .}$$

Пример 22:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2 + 6x - 5, y = x - 1.$

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой: $-x^2 + 6x - 5 = x - 1.$

Откуда $x_1 = 1, x_2 = 4.$



Площадь фигуры, ограниченной сверху и снизу линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

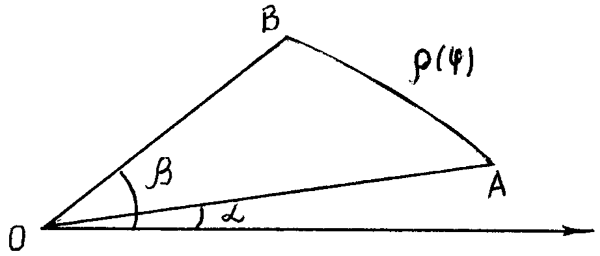
$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx, \quad \text{где} \quad f_1(x) = -x^2 + 6x - 5, f_2(x) = x - 1, a = 1, b = 4.$$

Искомая площадь: $S = \int_1^4 [(-x^2 + 6x - 5) - (x - 1)]dx = \frac{9}{2}$ (кв.ед.).

Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах

Пусть P- замкнутое множество, граница которого состоит из некоторой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi), \alpha\le\varphi\le\beta$ ($\rho(\varphi)$ - непрерывная функция), и двух отрезков $\varphi=\alpha, \varphi=\beta,$ то есть

$$P=\{(\rho,\varphi): \alpha\le\varphi\le\beta, 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}.$$



Тогда формула для вычисления площади множества P имеет вид:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Вычисление объемов

1. Если объем V тела существует и $S=S(x), [a\le x\le b]$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, то

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

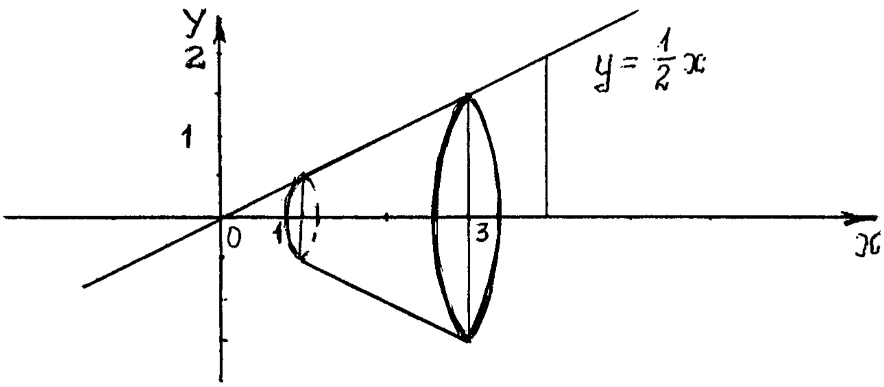
2. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площади $a\le x\le b, 0\le y\le y(x),$ где $y(x)$ - непрерывная однозначная функция, равен

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Пример 23:

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{2}x, y=0, x=1, x=3.$

Решение. Полученное тело называется усеченным конусом.



Согласно формуле нахождения объема тела вращения, имеем:

$$V=\pi\int_1^3 y^2dx=\pi\int_1^3\frac{x^2}{4}dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^3=\frac{13\pi}{6}.$$

Вычисление площадей поверхностей вращения

Пусть дуга AB является графиком функции $y=f(x)$, где $a\le x\le b$, а f имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$.

Определение: Площадью S поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси Ox дуги AB, называется предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением ломаной, вписаной в дугу AB, когда число ее звеньев неограниченно возрастает, а наибольшая из длин ее звеньев стремится к нулю.

Площадь S вычисляется по формуле:

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется областью определения функции?
2. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и на отрезке.
3. В чем отличие точек разрыва первого и второго рода?
4. Сформулируйте определение производной. Каков ее геометрический и физический смысл?
5. Выведите формулы производных суммы, произведения, частного двух функций.
6. Докажите теоремы о дифференцировании сложной и обратной функции.
7. Сформулируйте теоремы Ролля и Лагранжа. Каков их геометрический смысл?
8. Перечислите типы неопределенностей, которые можно раскрывать с помощью правила Лопиталя.
9. Сформулируйте определение экстремума функции, его необходимый и достаточный признаки.
10. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба?
11. Что такое асимптота линии?
12. Приведите схему полного исследования функции.
13. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
14. Что называется неопределенным интегралом?
15. Как расположены касательные к интегральным кривым в точках, имеющих одну и ту же абсциссу?
16. Что называется определенным интегралом?
17. Докажите основные свойства определенного интеграла:
    а) постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла;
    б) определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Исследовать на непрерывность функции:

   а) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; б) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 3, \\ 2x+1, & x > 3. \end{cases}$

2. Найти производные функций:

   а) $y = e^{5-x}$; б) $y = \sin 6x$; в) $y = \cos^4 3x$;

   г) $y = \ln \dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; д) $x^2 - 2xy + y^3 = 1$; е) $y = x^{3x}$.

3. Показать, что функция $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

4. Найти производную n-го порядка функций:

   а) $y = 6^x$; б) $y = x^n \cdot \sqrt{x}$.

5. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x + \sin x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin 2x}{\ln(1+3x)}$; в) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$.

6. Исследовать на экстремум функции:

   а) $y = (x-3)(x+4)^2$; б) $y = \dfrac{2 \ln x}{x}$; в) $y = \dfrac{3x}{x^2+2}$.

7. Найти точки перегиба графиков функций:

   а) $y = (x-3)(x+4)^2$; б) $y = \dfrac{2 \ln x}{x}$; в) $y = \dfrac{3x}{x^2+2}$.

8. Найти асимптоты графиков функций:

   а) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; б) $y = \dfrac{x}{(2+x)^2}$; в) $y = 9x + \dfrac{1}{x-1}$.

9. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. **Определить** размеры площадки.

10. Найдите неопределенные интегралы:

    а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$. б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. в) $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$

    г) $\displaystyle\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. д) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

11. Вычислить определенные интегралы:

    а) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. б) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x dx.$ в) $\displaystyle\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$

12. Вычислите несобственный интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или установите его расходимость.

13. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, x - y + 2 = 0.$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x=2$ - точка разрыва 2-го рода; б) $x=3$ - точка разрыва 1-го рода.

2. а) $-e^{5-x}$; б) $6\cos 6x$; в) $4\cos^3 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3$;
г) $\dfrac{4a^2x}{a^4-x^4}$; д) $\dfrac{2(y-x)}{3y^2-2x}$; е) $3x^{3x}(1+\ln x)$.

4. а) $6^x \ln^n x$; б) $\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$.

5. а) $0,5\ln 2,5$; б) 1; в) $-0,5$.

6. а) $y_{\max}(-4)=0$, $y_{\min}(2/3)=-1372/27$;
б) $y_{\max}(e)=2/e$;
в) $y_{\max}(\sqrt{2})=3\sqrt{2}/4$, $y_{\min}(-\sqrt{2})=-3\sqrt{2}/4$.

7. а) при $x=-5/3$; б) при $x=e^{1,5}$; в) при $x=0$, $x=\pm\sqrt{6}$.

8. а) $x=1$, $y=x+1$; б) $x=-2$, $y=0$; в) $x=1$, $y=9x$.

9. 900 (30x30).

10. а) $-\dfrac{1}{\arcsin x}+C;$ б) $\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\ln|tgx|+C;$ в) $-\dfrac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C;$
г) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C;$ д) $\dfrac{\sin^5 x}{5}-\dfrac{2\sin^7 x}{7}+\dfrac{\sin^9 x}{9}+C.$

11. а) $\dfrac{\pi}{3}$; б) 1; в) $315\dfrac{1}{26}$.

12. π.

13. $21\dfrac{3}{5}\pi$.

Контрольная работа №1.

1. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график.

1. $y=\begin{cases} x, & x<-5, \\ \dfrac{x^2-25}{x-5}, & -5\le x<5, \\ 10, & x\ge 5. \end{cases}$

2. $y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x<-4, \\ \dfrac{1}{|x-4|}, & -4\le x<4, \\ 4, & x\ge 4. \end{cases}$

3. $y=\begin{cases} 4, & x<-2, \\ \dfrac{x^3-8}{x-2}, & -2\le x<2, \\ 12, & x\ge 2. \end{cases}$

4. $y=\begin{cases} 0, & x<-3, \\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x<0, \\ x+3, & x\ge 0. \end{cases}$

5. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ e^x, & 0\le x<2, \\ e^2, & x\ge 2. \end{cases}$

6. $y=\begin{cases} 5, & x\le 0, \\ \log_{0.5} x, & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

7. $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \log_2 x, & 0<x<2, \\ \dfrac{x^2}{4}, & x\ge 2. \end{cases}$

8. $y=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ x+\dfrac{\pi}{2}, & -1<x\le 1, \\ \sqrt{x-1}, & x>1. \end{cases}$

9. $y=\begin{cases} |x-2|, & x\le -2, \\ 2\cos\dfrac{\pi x}{4}, & -2<x\le 2, \\ |x-2|, & x>2. \end{cases}$

10. $y=\begin{cases} 2, & x<0, \\ \sqrt{4-x^2}, & 0\le x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

2. Найти производные функций:

11. а) $y=(arctg 3x)^{(3x)^2}$; б) $x^2\cdot\sin y+y^2\cos x+1=0$;

12. а) $y=\dfrac{x^{1/x}}{\ln x}$; б) $\dfrac{y}{x}+e^{y/x}=0$;

13. а) $y=(\arcsin x)^{5x}$; б) $arctg(xy)=e^{2y}$;

14. а) $y=x^{3x^2-x}$; б) $e^x+e^y-2^{xy}=2$;

15. а) $y=\log_{\cos x}\sin x$; б) $e^x=(x^2-y)\cdot tg\,(x^2-y)$;

16. а) $y=x^{-x}2^x x^2$; б) $tg\ x\cdot ctg\ y=2^x$;

17. а) $y=x^{1/\ln x}$; б) $e^{y^2}+y^2\ln x-1=0$;

18. а) $y=\dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$; б) $\ln x\ln y=\dfrac{x+y}{x-y}$;

19. а) $y=\log_x(\sin x-\cos x)$; б) $tg(xy)=e^{x^2}$;

20. а) $y = e^{x^{2x}}$;   б) $\ln x / \ln y = \dfrac{y}{x}$.

3. Используя правило Лопиталя, найти пределы функций.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx)$;
22. $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{\ln(1 - x/a)}{ctg(\pi x/a)}$;
23. $\lim\limits_{x\to+0} (1 + 1/x)^x$;
24. $\lim\limits_{x\to+0} x^{3/(1+\ln x)}$;
25. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\sin x)}$;
26. $\lim\limits_{x\to0} (ctgx)^{\sin x}$;
27. $\lim\limits_{x\to0} (\dfrac{1}{x} - ctgx)$;
28. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;
29. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$;
30. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin e^{2x} x - x}{5x^2 + x^3}$.

4. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график.

31. $y = x^3 - 24x$;
32. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;
33. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;
34. $y = \dfrac{x^2}{x + 4}$;
35. $y = \dfrac{10}{x^2 - 16}$;
36. $y = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x}$;
37. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$;
38. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;
39. $y = 8x^2 - x^4 - 5$;
40 $y = \dfrac{8x^3 - 12x^2}{x^3}$.

5. Найти неопределенные интегралы:

41.а) $\int (\dfrac{1}{\cos^2 4x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \sin 10x \cos 5x)dx$ б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$

в) $\int \dfrac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$ г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$

42. а) $\int (\dfrac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}} + \dfrac{5+x}{\sqrt[4]{x}} - \sin 3x \sin 5x)dx$ б) $\int \dfrac{x-1}{x^2 - x - 1}dx$

в) $\int \dfrac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$ г) $\int \dfrac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x}$

43. а) $\int (\dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{9}} - \sqrt[5]{1-x} + \sin^2 x \cos^2 x)dx$ б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x^2 - 6x + 12}}$

в) $\int \dfrac{x^5 - x + 1}{x^3 + x}dx$ г) $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$

44. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}-3^{-8x}+\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

в) $\int\frac{2dx}{3x(4+x)(1+2x+x^2)}$ г) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$

45. а) $\int\left(\frac{1}{4x^2-1}+\frac{1+\sqrt[5]{x}}{x^2}-\cos^2 6x\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

в) $\int\frac{dx}{x(1+2x)(4+4x+x^2)}$ г) $\int x\sin^2 x^2dx$

46. а) $\int\left(\frac{1}{x^2-9}+\frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}-\sin^2 4x\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{4x^2-5x+2}$

в) $\int\frac{2dx}{x(1+2x)(4+6x+x^2)}$ г) $\int\sin^5 xdx$

47. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{x^2}{x^2+4}-\cos 3x\cos 5x\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

в) $\int\frac{x+2}{x(x-3)}dx$ г) $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

48. а) $\int\left(\frac{x}{x^2+9}-2^{-7x}+\sin^2\frac{x}{4}\right)dx$ б) $\int\frac{(x+3)dx}{x^2-2x-5}$

в) $\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$ г) $\int\sin^4 xdx$

49. а) $\int\left(\frac{1}{9+x^2}-\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}}+\sin 5x\cos 5x\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$

в) $\int\frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$ г) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x\cos^2 3x}$

50 а) $\int\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-(x+5)^8+\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\right)dx$ б) $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$

в) $\int\frac{4dx}{x(1-x)(1-x-x^2)}$ г) $\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$.

6. Вычислить определенный интеграл:

51. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$; 52. $\int_0^1\ln(1+x^2)dx$;

53. $\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$; 54. $\int_3^4\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^4}dx$;

55. $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$; 56. $\int_0^{2\pi}xarctgxdx$;

57. $\int_0^{0,5}\arcsin xdx$; 58. $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$;

59. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin 3x dx;$

60. $\int\limits_{0}^{1} x^3 actgx dx.$

7. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

61. $\int\limits_{\ell}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x};$

62. $\int\limits_{-\infty}^{3} \frac{1}{x^2-6x+10}dx;$

63. $\int\limits_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}};$

64. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2-4};$

65. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx;$

66. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

67. $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx;$

68. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

69. $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx;$

70. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}dx.$

8. Приложения определенного интеграла

71. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x, y=e^{-x}, x=3.$

72. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ кривой $y=\sin 2x (0\le x\le 2\pi).$

73. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ кривой $x^2+y^2=25.$

74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=6\cos 3\varphi (r\ge 0)$, заданной в полярной системе координат.

75. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=2\sin 3\varphi (r\ge 0),$, заданной в полярной системе координат.

76. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=2\sin 2\varphi$, заданной в полярной системе координат.

77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=4\cos 2\varphi$, заданной в полярной системе координат.

78. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2, y=0.$

79. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}, y=x.$

80. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$

СОДЕРЖАНИЕ

План 2002/2003, поз. 10

Баркова Елена Александровна
Гладков Лев Львович
Чумакова Римма Викторовна

Программа, методические указания и контрольные задания по дисциплине «Высшая математика», часть I для студентов заочной формы обучения специальности 1-45. 01. 03 -Сети телекоммуникаций.

Редактор Вердыш Н.В.

Подписано к печати 10.10.2003г.
Формат 60S84/16
Усл. Печ. Л. 2,1. Уч. - изд. Л. 1,8
Тираж 90 экз. Заказ 139.